2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2021年1月

1° 数项级数　2° 幂级数　3° 傅里叶级数

? —13— 08

第十章 无穷级数

2009-2021 年级数分数分布

	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
数一	13	10	4	10	14	10	4	10	4	4	14-	14	12
数三	4	0	4	4	4	10	4	14	14	10	14-	14-	12+

第一节 常数项级数

考试要求

1、理解 常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念。

2、了解 任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系。

3、掌握级数的基本性质和级数收敛的必要条件，几何级数及p级数的收敛与发散的条件。

4、掌握正项级数收敛性的比较判别法、比值判别法、根值判别法会用积分判别法。

5、掌握交错级数的莱布尼茨判别法。

考试内容概要

一、级数的概念

1. 定义： 形如$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$

的表达式称为(常数项)无穷级数.

一般项

(1) 级数的部分和--级数前n项和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

(2) 部分和数列--部分和构成的数列 $\{s_n\}$

$$s_1 = u_1,$$
$$s_2 = u_1 + u_2,$$
$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$
$$\vdots$$
$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

2. 级数的收敛与发散:

当 n 无限增大时，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 s_n 有极限 s，即 $\boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = s}$，则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，这时极限 s 叫做级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和．且记为

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

如果 S_n 没有极限，则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(1) 常数项级数收敛(发散) $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ 存在(不存在).

对给定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，可惟一确定部分和数列 $\{s_n\}$,

反之，对给定数列 $\{s_n\}$，令

$$u_1 = s_1,$$
$$u_2 = s_2 - s_1,$$
$$\vdots$$
$$u_n = s_n - s_{n-1},$$
$$\vdots$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{s_n\}$.

(2) 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与数列$\{s_n\}$同时收敛或同时发散

且在收敛时有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k .$$

(3) 当级数收敛时，其和与部分和的差称为

级数的余项.

$$r_n = \boxed{s - s_n} = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i}$$

即 $S_n \approx s$ 误差为 $|r_n|$.

$(\lim_{n\to\infty} r_n = 0)$

例1 判定级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overset{u_n}{\ln\frac{n+1}{n}}=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}+\cdots$$ 的收敛性.

解 $\because \underline{s_n} = \ln 2 + \ln\underline{\frac{3}{2}} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\underline{\frac{n}{n-1}} + \ln\frac{n+1}{n}$

$$= \cancel{\ln 2} + (\cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2}) + (\ln 4 - \cancel{\ln 3})$$

$$+ \cdots + [\cancel{\ln n} - \cancel{\ln(n-1)}] + [\ln(n+1) - \cancel{\ln n}]$$

$$= \ln(n+1),$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\ln(n+1) = +\infty,$$

所以级数发散.

例1 讨论等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \ (a \neq 0)$$的收敛性.

(收敛) $\underline{=} \dfrac{a}{1-q}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} aq^n \underset{收敛}{=} \dfrac{aq}{1-q}$

解 如果$q \neq 1$时

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$$

$$= \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q},$$

当$|q| < 1$时, $\because \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$ 收敛

当$|q| > 1$时, $\because \lim_{n\to\infty} q^n = \infty \quad \therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ 发散

如果$|q|=1$时

当$q=1$时，　$s_n=na\to\infty$　级数发散

当$q=-1$时，　级数变为 $a-a+a-a+\cdots$

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}=\lim_{n\to\infty} a=a,$$

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n}=\lim_{n\to\infty} 0=0,$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_n$不存在　$\frac{a}{1-q}$　级数发散

综上所述得

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} 当|q|<1时,收敛 \\ 当|q|\geq 1时,发散 \end{cases}$$

例 判定级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)\cdot(n+2)}+\cdots.$$ 的收敛性.

解 $$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$ $=1$

于是 $$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$=(1-\cancel{\frac{1}{2}})+(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}})+(\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4})+\cdots+(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1},$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1,$$

故级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，和为 1.

2、 无穷级数的基本性质

$=k\sum u_n$

性质1. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛.

证 设 s_n 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的部分和， w_n 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = w$. 则

$$s_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n$$

$$= k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = kw_n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} kw_n = kw,\quad 故 \sum_{n=1}^{\infty} ku_n = kw.$$

结论： 级数的每一项同乘一个不为零的常数，敛散性不变.

性质2. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = w$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，其和为 $s \pm w$.

证 设 $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$，$w_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$，

收敛+收敛=收敛

收+发=发

发+发=不定

则 $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$，$\lim\limits_{n \to \infty} w_n = w$，

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k \pm v_k) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n)$$

$$= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = s_n \pm w_n$$

所以 $\lim\limits_{n \to \infty} T_n = \lim\limits_{n \to \infty} (s_n \pm w_n) = s \pm w$，

故 $$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = s \pm w = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

注： 级数的加减运算.

性质3 在一个级数前面加上(或去掉、改变)有限项，级数的敛散性不变.

证明 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \cdots + u_n + \cdots$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$$

令 $u_1 + u_2 + \cdots + u_k = a,\qquad s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$

$$\sigma_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n},$$

则 $\sigma_n = u_1 + \cdots + u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{k+n} - (u_1 + \cdots + u_k)$

$$= s_{n+k} - a,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (s_{n+k} - a) = \lim_{n\to\infty} s_n - a.$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散.

性质4 收敛级数加括号后所成的级数仍然收敛,且与原级数有相同的和.

$u_1+u_2+u_3+\cdots$ $\qquad\sum u_n$

分析 $(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+(u_6+u_7+u_8+u_9)+\cdots$

σ_n $\qquad \sigma_1=s_2,\ \sigma_2=s_5,\ \sigma_3=s_9,\ \cdots,\sigma_m=s_n,\cdots$

显然　数列$\{\sigma_m\}$是数列$\{s_n\}$的一个子序列,

所以 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\sigma_m=\lim_{n\to\infty}s_n=s.$

注意: 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如 $\overset{0}{(1-1)}+\overset{0}{(1-1)}+\overset{0}{(1-1)}+\cdots$ 　收敛

$1-1+1-1+1-1+\cdots$ 　发散

推论 如果加括号后所成的级数发散,则原级数也发散.

收敛的必要条件

性质5 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

证明 设 $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 　而$u_n = s_n - s_{n-1}$,

$$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

注 1.如果级数的一般项不趋于零,则级数发散;

例如 (1) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots$ 　发散

(2) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1} + \cdots$ 　发散

2.必要条件不充分.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n} = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} + \cdots$

有$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，但级数不收敛.

(2) 调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，但级数不收敛.

证明 **反证法** 假设调和级数收敛，其和为s.

$$\because \quad s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n}-s_n)=\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n}-\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s-s=0$

便有 $0\geq\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$ $\therefore$ 级数发散

矛盾

二、级数的审敛准则

1、正项级数

如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$中各项均有$u_n \geq 0$, 这种级数称为正项级数.

$$\boxed{s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n} = s_{n-1} + u_n,$$

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$$

部分和数列$\{s_n\}$为单调增加数列.

定理 **正项级数收敛的充要条件:**

正项级数收敛$\Leftrightarrow$它的部分和数列s_n有界.

(1)比较判别法

[illegible]

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且满足关系 $u_n \le v_n \ (n=1,2,\cdots)$，

1° $u_n \le c v_n \ (c>0)$

2° $n=k, k+1, \cdots$

则 (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

大收小必收

小散大必散

证明 $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$，$w_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

$\because u_n \le v_n$，

$$\therefore s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \le (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = w_n,$$

例 判定调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 的敛散性

解

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\underbrace{(1+\frac{1}{2})}_{2\text{项}}+\underbrace{(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})}_{2\text{项}\ 2^1}+\underbrace{(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})}_{4\text{项}\ 2^2}+\underbrace{(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16})}_{8\text{项}\ 2^3}$$

$$+\cdots+\underbrace{(\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}})}_{2^m\text{项}}+\cdots$$

$$>\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16})$$

$$+\cdots+(\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}})+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\cdots$$

$\because$ 级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\cdots$ 发散, $\therefore$ 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

例 判定级数$1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\dfrac{1}{4^p}+\cdots+\dfrac{1}{n^p}+\cdots(p>0)$的敛散性.

$k-1\le x\le k \Rightarrow \dfrac{1}{k^p}\le\dfrac{1}{x^p}$

解 当 $p\le 1$时，$\dfrac{1}{n^p}\ge\dfrac{1}{n}$，则$P-$级数发散 .

$\dfrac{1}{k^p}=\int_{k-1}^{k}\dfrac{1}{k^p}dx\le\int_{k-1}^{k}\dfrac{1}{x^p}dx$

当 $p>1$时，
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)$$

2　4

$$+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(2^m)^p}+\frac{1}{(2^m+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{m+1}-1)^p}\right]+\cdots$$

8　2^m

$$<1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)$$

$$+\cdots+\left[\frac{1}{(2^m)^p}+\frac{1}{(2^m)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^m)^p}\right]+\cdots$$

放大

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{4^{p-1}}+\frac{1}{8^{p-1}}+\cdots+\frac{1}{(2^m)^{p-1}}+\cdots$$

$$1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{4^{p-1}}+\frac{1}{8^{p-1}}+\cdots+\frac{1}{(2^{m})^{p-1}}+\cdots$$ 是公比为

$\frac{1}{2^{p-1}}$ 的几何级数，收敛于 $\frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}$，

所以 $P-$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$ 收敛.

$$P-级数\begin{cases}当p>1时, & 收敛\\ 当p\le 1时, & 发散\end{cases}$$

重要参考级数：几何级数，p−级数，调和级数.

(2)比较判别法的极限形式

$u_n\to 0$
$v_n\to 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n\geq 0$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同上，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$,则

1° $u_n \not\to 0$

2° $u_n\to 0$ $u_n\sim v_n$

1） $l=0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$ $\sum\frac{1}{n}$ 发散

2） $l=+\infty$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛；

3）当 $0<l<+\infty$ 时， $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散

注：1、比较审敛法的不方便— 须有参照级数.

2、正项级数收敛本质上是一般项趋于零足够快。

收敛 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ $1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛

(3) 比值判别法(达朗贝尔D'Alembert判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$，则

(1) 当 $l < 1$ 时， 级数收敛；

(2) 当 $l > 1$ 时， 级数发散；

(3) 当 $l = 1$ 时， 不能确定 .

证明 当 l 为有限数时，对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$，当 $n > N$ 时，

有 $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \varepsilon$， 即 $l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon \quad (n > N)$

(1) 当 $l < 1$ 时， 取 $\varepsilon < 1 - l$， 使 $r = \varepsilon + l < 1$，

$u_{N+2} < r u_{N+1}$， $u_{N+3} < r u_{N+2} < r^2 u_{N+1}$，

$\cdots$， $u_{N+m} < r^{m-1} u_{N+1}$，

$$\sum_{m=1}^{\infty} r^{m-1} u_{N+1} = u_{N+1} \sum_{m=1}^{\infty} r^{m-1}$$ 收敛

所以 $\sum_{m=1}^{\infty} u_{N+m} = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_u$ 收敛， 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 .

(2) 当 $l > 1$ 时，取 $\varepsilon < l - 1$， 使 $r = l - \varepsilon > 1$,

当 $n > N$ 时， $u_{n+1} > r u_n > u_n$,

$\lim_{n \to \infty} u_n \neq 0$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 .

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 ,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,

$(l = 1)$

因此当 $l = 1$ 时比值判别法失效.

(4)根值审敛法（柯西判别法）：

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ （ρ为数或$+\infty$），

则$\rho < 1$时，收敛；　　$\rho > 1$时，发散.

（$\rho = 1$时失效）

比值审敛法、根值审敛法的优点：

由项的比值或根值的极限值确定级数的收敛性.

(5)积分判别法 (柯西)

若$f(x)$在区间$[1,\infty)$是正的，且单调递减，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$收敛当且仅当反常积分$\boxed{\int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛}}$.

$f(x)=\frac{1}{x}$

如：调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的敛散性，由于$\frac{1}{x}$在区间$[1,\infty)$的值是正的、单调递减，且反常积分积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=+\infty$发散，用积分判别法知调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的.

2、交错级数及其审敛法

正、负项相间的级数称为交错级数.

$u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5-\cdots)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots$$

（其中 $u_n > 0$）

$$\text{或} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots + (-1)^{n}u_n + \cdots$$

莱布尼茨定理: 如果交错级数满足条件:

$u_n \downarrow$

$$(1)\ u_n \ge u_{n+1}\ (n = 1,2,3,\cdots),\quad (2)\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0,$$

$n+1$

则级数收敛，且其和 $s \le u_1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+(-1)^n}} \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$$

注：莱布尼茨定理是交错级数收敛的充分条件

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n \exists \Longleftrightarrow \lim S_{2n} = \lim S_{2n+1}$

证明 $\because u_{n-1} - u_n \geq 0,$

$\because s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$

数列 s_{2n} 是单调增加的,

又 $s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$

$\leq u_1$　　　数列 s_{2n} 是有界的,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s \leq u_1.$　　$\because \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0,$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (s_{2n} + u_{2n+1}) = s,$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s.$ $\therefore$ 级数收敛于和 s, 且 $s \leq u_1.$

余项 $r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots),\ |r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots,$

满足收敛的两个条件, $\therefore |r_n| \leq u_{n+1}.$

例 判定级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 的敛散性

$u_n \downarrow$

解 $\because \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)-\sqrt{x}\cdot 1}{(x-1)^2}$

$$= \frac{-(1+x)}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0 \quad (x \geq 2)$$

故当 $x>2$ 时,函数 $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ 单调递减,

$\therefore u_n > u_{n+1}\ (n>2)$, 又 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1} = 0$.

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛.

3、任意项级数

正项和负项任意出现的级数称为任意项级数.

定理 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

证明 令$\boxed{v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)}=\begin{cases}|u_n|, & u_n\ge 0,\\ 0 & u_n<0,\end{cases}\quad (n=1,2,\cdots),$

显然 $v_n\ge 0$, 且 $v_n\le|u_n|$, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,

又 $\because u_n=2v_n-|u_n|$,

则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2v_n-|u_n|)=\sum_{n=1}^{\infty}2v_n-\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

绝对收敛与条件收敛

定义：若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

结论 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散.

性质：

绝+绝=绝

绝+条=条

条+条=敛

注：交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$，

$\frac{1}{n^p}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$

$p=\frac{1}{2}$

当 $p>0$ 时收敛，当 $p\le 0$ 时发散；

当 $0<p\le 1$ 时条件收敛；当 $p>1$ 时绝对收敛。

重要参考级数:

1、几何级数(等比级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0) \begin{cases} 当|q|<1时,收敛 \\ 当|q|\geq 1时,发散 \end{cases}$$

$= \frac{a}{1-q}$

2、$p-$级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$ $\begin{cases} 当p>1时, & 收敛 \\ 当p\leq 1时, & 发散 \end{cases}$

对数$p-$级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$

3、交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$,

当 $p>0$ 时收敛,当 $p\leq 0$ 时发散;

当 $0<p\leq 1$ 时条件收敛;当 $p>1$ 时绝对收敛。

常考题型与典型例题

考点

1、数项级数敛散性的判定

（1）具体级数—判别法（比较、比值、根值、积分等）

（2）含参数的级数—讨论参数的取值

（3）抽象级数—选择题（较难）

2、数项级数的证明

3、数项级数的和—定义或利用幂级数的和函数

数项级数敛散性的判定解题思路：

1、若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；否则进一步判断；

$u_n \sim v_n$

2、若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，先化简 u_n，视其特点选择适当的判别法：

（1）若 u_n 中含有 $\dfrac{1}{n^\alpha}$（或 $\dfrac{1}{n^\alpha \ln^p n}$），则可与 p 级数（或对数 p 级数）比较；

(2) 若 u_n 中含有 n 的乘积的形式(包括 $n!$)，则可考虑用比值判别法；

(3) 若 u_n 中含有形如 $a^{f(n)}$ 的因子，则可考虑用根值判别法；

(4) 以上方法均失效，则可利用已知级数的敛散性质，结合敛散的定义和性质，考察其收敛性。

3、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数，则可用方法 1 和 2 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 的敛散性

（1） 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；

（2）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则看 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否是交错级数，

若是，用莱布尼兹判别法判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否条件收敛。

若不是，用定义或性质。

V研客 在线教育 金榜时代

例 2(2015-3) 下列级数中发散的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$. 收敛

收敛 (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$

答案 C

发散 (C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$. $= \boxed{\sum\frac{(-1)^n}{\ln n}}$ 收敛 $+ \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散

收敛 (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$. 比值

分析：(A) 正项，根值 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3}=\frac{1}{3}<1$

(B) $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

(C) $\ln n=\ln(1+n-1)\leq n-1$ $\quad \frac{1}{\ln n}\geq\frac{1}{n-1}$

$\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\frac{1}{n}}=\infty}$

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1$

例 3(2013-3) 设$\{a_n\}$为正项数列，下列选项正确的是

设 $\sum u_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum u_n^{?}$ 收敛

1° 选择题排除

$u_n \to 0$ (A) 若 $a_n > a_{n+1}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛；

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则 $a_n > a_{n+1}$；

答案：D

2° 举反例，排除

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则存在常数 $p>1$，使 $\lim_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在；

(D) 若存在常数 $p>1$，使 $\lim_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) $p>1$

$a_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$

$\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$ 收敛

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$

$\sum \frac{1}{n^p}$ 收敛

$\lim_{n\to\infty} n^p \cdot \frac{1}{n\ln^2 n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{x\ln^2 x}$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}dx$ 收敛

例 4(2009-1) 设有两个数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则

(A) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛. 答案C　$a_n=b_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$　$a_nb_n=\frac{1}{n}$

(B) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$发散. $a_n=b_n=\frac{1}{n}$　$a_nb_n=\frac{1}{n^2}$

(C) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$收敛.

(D) 当$\sum |b_n|$发散时，$\sum a_n^2 b_n^2$发散. $a_n=b_n=\frac{1}{n}$　$a_n^2b_n^2=\frac{1}{n^4}$

证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0 \Rightarrow \{a_n\}$有界 $\Rightarrow \exists M>0,\ |a_n|\le M$

$a_n^2b_n^2 \le M^2b_n^2 = M^2|b_n|^2$

例 5(2011-3) 设$\{u_n\}$是数列，则下列命题正确的是

是 $\sum_{n=1} u_n$ 加括号得到

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛．

$=(u_1+u_2)+(u_3+u_4)+\cdots$

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛．

答案：A

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛．

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛．

函数项级数

第二节 幂级数

考试要求

1、了解函数项级数的收敛域及和函数的概念.

2、理解幂级数收敛半径的概念，并掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法.

3、了解幂级数在其收敛区间内的基本性质（和函数的连续性、逐项求导和逐项积分），会求一些幂级数在收敛区间内的和函数，并会由此求出某些数项级数的和.

4、了解函数展开为泰勒级数的充分必要条件.

5、掌握e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$及$(1+x)^\alpha$的麦克劳林展开式，会用它们将一些简单函数间接展开为幂级数.

考试内容概要

一、函数项级数的一般概念

1、定义

设$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$是定义在区间 I 上的函数，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$

称为定义在区间 I 上的函数项级数.

2、收敛点与收敛域

数项

如果$x_0 \in I$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛,称$x_0$为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛点;

否则,称为发散点.收敛域,发散域.

3、和函数

$S_n(x)$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

二、幂级数的概念

1.定义 形如 a_0 $x=x_0$ 时 $n=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的级数称为**幂级数**. 其中a_n称为幂级数的系数

当$x_0 = 0$时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots,$

$-1<x<1$

当$|x|<1$时,收敛; $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$ 当$|x| \geq 1$时,发散;

2、幂级数的收敛性

定理 (*Abel*定理)

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0(x_0 \neq 0)$处收敛,则它在满足不等式$|x|<|x_0|$的一切$x$处绝对收敛.

$|a_n x^n|$

$=|a_n x_0^n (\frac{x}{x_0})^n|$

$\le M\cdot|\frac{x}{x_0}|^n$

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0(x_0 \neq 0)$处发散,则它在满足不等式$|x|>|x_0|$的一切$x$处发散.

证明

(1) $\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$,

$\exists M$, 使得 $|a_n x_0^n| \le M \quad (n = 0,1,2,\cdots)$

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

$\because$ 当 $\left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$时， 等比级数$\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$收敛,

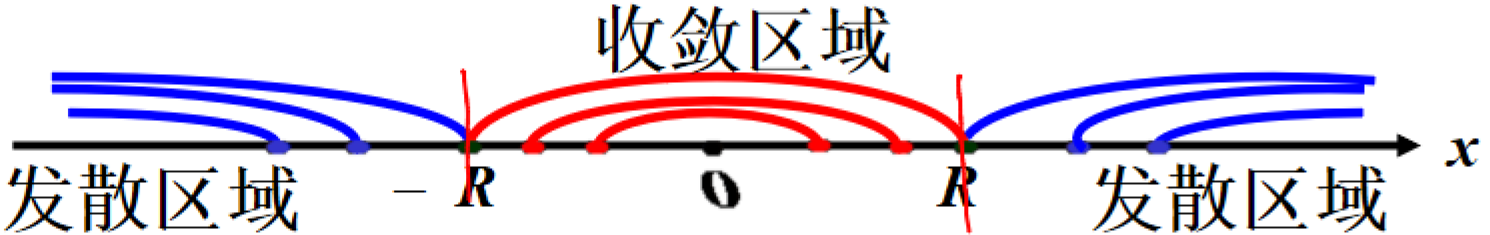
$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right| \text{收敛，即级数} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{收敛;}$$

(2) 假设当 $x = x_0$时发散，

而有一点x_1适合$|x_1| > |x_0|$使级数收敛,

由(1)结论 则级数当$x = x_0$时应收敛, 这与所设矛盾.

几何说明



结论 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不是仅在 $x=0$ 一点收敛，也不是在整个数轴上收敛，则必存在一个完全确定的正数 R，它具有下列性质：

当 $|x|<R$ 时，幂级数绝对收敛；

当 $|x|>R$ 时，幂级数发散；

当 $x=R$ 与 $x=-R$ 时，幂级数可能收敛也可能发散。

定义： 正数 R 称为幂级数的<u>收敛半径</u>.

$(-R, R)$ 称为幂级数的<u>收敛区间</u>. 开区间

收敛区间及收敛端点称为幂级数的<u>收敛域</u>.

规定 (1) 幂级数只在 $x=0$ 处收敛，$R=0$，收敛区间 $x=0$；

(2) 幂级数对一切 x 都收敛，$R=+\infty$，收敛区间 $(-\infty,+\infty)$.

定理 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l$$

则 (1) 当 $0 < l < +\infty$ 时， $R = \dfrac{1}{l}$；

(2) 当 $l = 0$ 时， $R = +\infty$； $(-\infty, +\infty)$

(3) 当 $l = +\infty$ 时， $R = 0$. 0

证明 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 应用达朗贝尔判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| = l|x|,$$

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l\ (l \neq 0)$ 存在，

由比值判别法，

当 $|x| < \dfrac{1}{l}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ 收敛，　$a_n x^n \not\to 0$

从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛. 右移

当 $|x| > \dfrac{1}{l}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ 发散，$\Rightarrow \sum\limits_{n=0} a_n x^n$

并且从某个 n 开始 $|a_{n+1}x^{n+1}| > |a_n x^n|$，

$|a_n x^n| \not\to 0$ 从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.　$|a_1 x| >$

收敛半径 $R = \dfrac{1}{l}$；

(2) 如果$l=0$, $\forall x\neq 0$, 有$\dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}\to 0\ (n\to\infty)$,

级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ 收敛，从而级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$绝对收敛.

收敛半径$R=+\infty$;

(3) 如果$l=+\infty$, $\forall x\neq 0$, 级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$必发散.

(否则由定理知将有点$x\neq 0$使$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$收敛)

收敛半径 $R=0$.

例 求下列幂级数的收敛域:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n;\qquad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};$$

解 (1) $\because\ l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n+1}}{(-1)^n\dfrac{1}{n}}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\qquad \therefore\ R=1\ \left(\frac{1}{l}\right)$$

收敛区间 $(-1,1)$

当 $x=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，收敛

当 $x=-1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，发散

故收敛域是 $(-1,1]$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-n)^n x^n$, $x=0$

$$\because\ l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = +\infty,\ \boxed{\therefore R = 0,\quad R = \frac{1}{l} = 0}$$

级数只在$x=0$处收敛,

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; $= e^x - 1$

$$\because\ l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0,\quad \therefore R = +\infty,$$

收敛域$(-\infty,+\infty)$.

三、幂级数的运算

1、代数运算性质

设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径分别为 R_1和R_2，

收敛域分别为I_1和I_2， $R = \min\{R_1, R_2\}$，

$$I = I_1 \cap I_2 .$$

1) 加减法

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n . \quad x \in I .$$

2) 乘法

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}.\ x\in(-R,R)$$

$$(\text{其中 } c_n = a_0\cdot b_n + a_1\cdot b_{n-1} + \cdots + a_n\cdot b_0)$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots \\
\text{柯} & a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \cdots \\
\text{西} & a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\
\text{乘} & a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\
\text{积} & a_3b_0 & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

3) 除法

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n .$$

(相除后的收敛域可能比 I 小得多)

$1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots$ $(-\infty, +\infty)$

$1 - x = \quad = 1 - x + 0 \cdot x^2 + \cdots$ $(-\infty, +\infty)$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad x \in (-1, 1)$

2、和函数的分析运算性质:

设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为 R,和函数为$S(x)$

1)连续性

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R,R)$内连续,

若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在端点收敛,则$s(x)$在端点单侧连续.

和函数在收敛域上的连续

(2)可导性

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可导，

并可逐项求导,且求导后级数的收敛半径不变．

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

(3)可积性

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛域内可积，

并可逐项求积分,且积分后级数的收敛半径不变．

$$\int_0^x s(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

四、函数的幂级数展开

1、定义

$$若f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, x\in I$$

则称$f(x)$在I上可展开为$(x-x_0)$的幂级数.

问题：1.如果能展开，a_n是什么？

?

2.展开式是否唯一？

3.在什么条件下才能展开成幂级数？

2、定理 如果$f(x)$在$U_\delta(x_0)$内能展成$(x-x_0)$的幂级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$,

则 $\boxed{a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)}$ $\quad (n=0,1,2,\cdots)$ （泰勒系数）

从而展开式唯一。

3、泰勒级数

设函数$f(x)$在$x=x_0$为处任意阶可导，幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$称为$f(x)$在x_0的泰勒级数.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$称为$f(x)$的麦克劳林级数.

问题　$f(x)$的泰勒级数在收敛域上是否收敛于$f(x)$？

不一定.

例 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

在$x=0$任意阶可导，且 $f^{(n)}(0)=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$(-\infty,+\infty)$

$\therefore f(x)$的麦氏级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0 \qquad x \in (-\infty,+\infty).$

可见，除 $x=0$ 外，$f(x)$ 的麦氏级数处处不收敛于 $f(x)$.

4、定理 $f(x)$在x_0的泰勒级数在(a,b)内收敛于$f(x)$

$$\Leftrightarrow \text{在}(a,b)\text{内} \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

级

证明 设$f(x)$的泰勒展开式为,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

$$\Rightarrow R_n(x) = f(x) - s_{n+1}(x),$$

必要性 因 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n+1}(x) = f(x)$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}[f(x) - s_{n+1}(x)] = 0$;

充分性 由$f(x) - s_{n+1}(x) = R_n(x)$,有

$$\lim_{n\to\infty}[f(x) - s_{n+1}(x)] = \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n+1}(x) = f(x)$,

故 $f(x)$的泰勒级数收敛于 $f(x)$.

5、常用已知和函数的幂级数

$-1<-x<1$ $\quad -1<-x^2<1$

(1) $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n;\ x\in(-1,1)\Rightarrow \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n;\quad \frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n};\ x\in(-1,1)$

$\frac{1}{1-(-x)}$ $\quad -1<-x\le 1$ $\quad -1<x<1$

(2) $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n};\ x\in(-1,1]\qquad \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n};\ x\in[-1,1)$

(3) $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!};\ x\in(-\infty,+\infty)$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$

(4) $\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!};\quad x\in(-\infty,+\infty)$

(5) $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!};\quad x\in(-\infty,+\infty)$

$x\in(-1,1)$，端点再定

(6) $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$

C_α^1 $\quad C_\alpha^2$ $\quad C_\alpha^n$

6、函数展开成幂级数

(1)直接法(泰勒级数法)

步骤:(1) 求 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$;

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ 的范围 I,

则 $f(x)$在 I上可展成在 x_0 处的泰勒级数,

即关于$x - x_0$ 的幂级数.

(2)间接法

根据唯一性，利用已知展开式，通过变量代换、四则运算、恒等变形、逐项求导、逐项积分等方法，求得所要展开式。

例 $$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\cos x = (\sin x)'$$

$$\therefore \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; \ (-1 < x < 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n;$$

$$(-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n};$$

$$(-1 < x < 1)$$

$= \frac{1}{1+x^2}$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \le x \le 1)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_0 处条件收敛

$R=|x_0|$

常考题型与典型例题

考点

1、求收敛半径、收敛区间及收敛域

2、函数展开成幂级数—直接法和间接法

3、求幂级数的和函数

一、求幂级数的收敛域

1、看作一般的函数项级数，用结论 ~~抽象的幂级数考虑阿贝尔定理~~

(1) 比值根值 $\rho(x)>1$ —— $u_{n+1}(x)=a_{n+1}x^{n+1} \Rightarrow \sum u_n(x)$ 发散

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，先求 $\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$ （或 $\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}$ ），

则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域为 $\{x\in R:\rho(x)<1\}\cup\left\{a\in R:\rho(a)=1 \text{且} \sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)\text{收敛}\right\}$

2、对于不缺项的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，**用阿达玛公式**

$(x-x_0)=t$ $=\sum a_n t^n$

先求 $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ （或 $\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ ），则级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径

$R=\frac{1}{\rho}$，收敛区间为 (x_0-R,x_0+R)，收敛域为 $(x_0-R,x_0+R)\cup\{\text{收敛端点}\}$

注：缺项幂级数的处理

(1)看作一般函数项级数;(2)利用变量替换转化为不缺项的幂级数.

V研客 在线教育 金榜时代

例 1(2009-3) 幂函数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为 $\underline{\quad \frac{1}{e} \quad}$.

不缺项

分析: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{n+1}-(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{e^n-(-1)^n}\right|$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}\left|1-\left(-\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right|}{e^n\left|1-\left(-\frac{1}{e}\right)^n\right|}\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2} = e$

$\sum\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$= \underbrace{\sum\frac{e^n}{n^2}x^n}_{R_1=\frac{1}{e}} - \underbrace{\sum\frac{(-1)^n}{n^2}x^n}_{R_2=1}$

例 2(1995-1) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=$__$\sqrt{3}$__.

法一

$$\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}\cdot\frac{2^n+(-3)^n}{n}\right|\cdot x^2$$

$|x|>\sqrt{3}$ 发散

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{2}{-3}\right)^n+1}{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n-3}\right|x^2=\frac{x^2}{3}<1\Rightarrow|x|<\sqrt{3}\text{ 收敛}$$

法二 $x\neq0$ 时

$$\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}(x^2)^n=\frac{1}{x}\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}t^n}$$

$R=3$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{3}$$

例 3(2000-1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\frac{x^n}{n}$ 的收敛区间，并讨论该区间端点处的收敛性. $[-3,3)$

$R=3$. $(-3,3)$—收敛域

分析 1° $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\right|\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{3}$

2° $x=3$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(-\frac{2}{3})^n}\cdot\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$ 发散

$x=-3$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n+2^n-2^n}{3^n+(-2)^n}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$

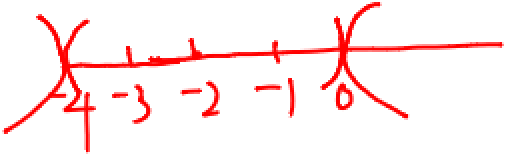
收敛

例 4(2008-1) 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 的收敛域为 $\underline{\ (1,5]\ }$

$x-(-2)$

$(-4,0)$

分析. 1° $R=2$



2° 收敛区间 $(1,5)$

3° 收敛域 $(1,5]$

例 5(2015-1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 　$R=1$

答案：B

$R=1$

(A) 收敛点，收敛点. 　　(B) 收敛点，发散点.

$x\sum na_n(x-1)^{n-1}$

(C) 发散点，收敛点. 　　(D) 发散点，发散点.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 　$R=1$

$(0,2)$ $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1}$ 　$R=1$

二、函数展开为幂级数

有理函数

例 6(2006-1) 将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展成 x 的幂级数.

$A=\frac{2}{3}\ B=\frac{1}{3}\quad =\dfrac{A}{2-x}+\dfrac{B}{1+x}$

$$f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}=\frac{x}{(2-x)(1+x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{2-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{1}{1+x}\right),$$

$-1<\frac{x}{2}<1$

而 $$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, x\in(-1,1),\quad \frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n, x\in(-2,2),$$

$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}\left[(-1)^{n+2}+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^{n+1}$

$$f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}=\frac{1}{3}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{n+1}+\frac{1}{2^n}\right)x^n, x\in(-1,1)$$

例 7(2007-3) 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，并指出其收敛区间.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right](x-1)^n,\ -1<x<3$$

$=(x-4)(x+1)$

分析：

$$f(x)=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{x-1-3}-\frac{1}{x-1+2}\right)$$

$$=-\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$x_0, 4$代5

x满足

$\left|\frac{x-1}{3}\right|<1$ 且 $\left|\frac{x-1}{2}\right|<1$

$|x-1|<2$

$-1<x<3$

例 8、将函数 $f(x)=\ln(x^2+x)$ 在 $x=1$ 的处展开为幂级数.

$$\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)(x-1)^n,\ 0<x\le 2$$

分析

$$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}=\frac{2x+1}{x(x+1)}$$

$x+x+1$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+(x-1)}+\frac{1}{x-1+2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(x-1)^n}{2^n}$$

$|x-1|<1$ 且 $\left|\frac{x-1}{2}\right|<1$

$0<x<2$

$$\int_1^x f'(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_1^x(-1)^n(t-1)^n dt+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_1^x(-1)^n\cdot\frac{(t-1)^n}{2^n}dt$$

$$f(x)-f(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}(x-1)^{n+1}$$

$$f(x)=\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-1)^{n+1}\quad(0<x\le 2)$$

例 9、将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 $x-\dfrac{\pi}{4}$ 的幂级数.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\right],-\infty<x<+\infty$$

分析

$$\sin x=\sin\left(\underbrace{x-\frac{\pi}{4}}_{\alpha}+\underbrace{\frac{\pi}{4}}_{\beta}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

例 10、将函数 $f(x) = \arctan x^2$ 展开成 x 的幂级数.

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+2}x^{4n+2}, -1 \le x \le 1$$

分析：

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4} = 2x\frac{1}{1-(-x^4)}$$

$$= 2x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n+1}$$

$|-x^4| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

$$\int_0^x f'(t)dt = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+2}x^{4n+2}$$

$f(x) - f(0)$

$-1 \le x \le 1$

$x = \pm 1$ 时

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+2}$$ 收敛

三、求幂级数的和函数

解题思路：

1、利用和函数的定义

2、利用常见函数的麦克劳林展开式和幂级数的变量替换

3、利用幂级数的逐项微分和逐项积分性质

例 11、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ 的收敛域及和函数.

系数

$$\frac{x}{(1-x)^2}, -1<x<1$$

解：不缺项

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

收敛半径 $R=1$，收敛区间 $(-1,1)$，$x=\pm1$ 时 $\sum n(\pm1)^n$ 发散

收敛域 $(-1,1)$

$$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$$

$$=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

例 12(2017-1) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)=$ $\underline{\quad \dfrac{1}{(1+x)^2} \quad}$.

[illegible]

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1 \qquad R=1$$

分析

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}x^{n}\right]'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n}\right)'$$

$$=\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^2}$$

V研客 在线教育 金榜时代

例 13(2014-3) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数. $\frac{3-x}{(1-x)^3}$, $-1<x<1$

$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ $R=1$

$(-1,1)$

分析

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)+(n+1)]x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''+\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+\left(\frac{x}{1-x}\right)'$$

V研客 在线教育 金榜时代

例 14、 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域及和函数.

$R=1$

$$\begin{cases} 1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x), x\neq 0; & -1\le x\le 1 \\ 0, x=0. \end{cases}$$

法一: $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1}=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$=\frac{1}{x^2}\left[-\ln(1-x)-x\right]$ $x\neq 0$ 积分, 求得 $S(x)$

法二: $S(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\frac{1}{x}S_1(x)$

$S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$ $\quad S_1''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$

$S_1(x)-S_1(0)=\int_0^x S_1'(t)\,dt=-\int_0^x\ln(1-t)\,dt$

例 15(2010-1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

$\cancel{x}\arctan x,\ x\in[-1,1]$

缺项

分析：1° 令 $t=x^2$　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}t^{n}$ — 不缺项 $\Rightarrow R=1$

收敛区间 $(-1,1)$　$x=\pm1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛

域 $[-1,1]$

$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=xS_1(x)$　$-1<x<1$

$S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$

$\int_0^x S_1'(t)\,dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt$

$S_1(x)-S_1(0)=\arctan x$

$S(x)=x\arctan x$