V研客™
在线教育
www.vyanke.com

2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2020年11月

第五章 定积分与反常积分

考试要点

一、定积分

数

(概)

求导

1、概念及性质（包括定积分定义求极限等）

2、变限积分（与其他知识点结合，几乎每年有）

3、各种计算

牛-莱公式、奇偶性、周期性、几何意义等

4、证明题

相关的等式及不等式

二、反常积分

1、求反常积分

原考查较简单

2、收敛性判定

新增“比较判别法”

考试要求

1. 理解(了解)定积分的概念．

2.掌握(了解)定积分的性质及定积分中值定理，掌握换元积分法与分部积分法．

3.会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分（数一、二）．

4.理解积分上限的函数，会求它的导数，掌握牛顿-莱布尼茨公式．

5.理解反常积分的概念，了解反常积分收敛的比较判别法，会计算反常积分．

6.掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量（平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心、形心等）及函数的平均值．(会用定积分求解简单的经济应用问题)

第一节 定积分

考试内容概要

一、定积分的概念

sum

1、定义 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 1,2,\cdots,n)$，$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$. 任取一点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], (i = 1,2,\cdots,n)$，如果 $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在（且与 $[a,b]$ 的分法及 ξ_i 的取法无关），则称此极限为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记为 $\int_a^b f(x)dx$，并称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

积分上限

积分和

$$\int_a^b \boxed{f(x)dx} = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

$[a,b]$ 积分区间

注：

(1) 定积分是和式的极限，因此它是一个数.

(2) 定积分值仅与被积函数及积分区间有关，

而与积分变量用什么字母表示无关.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

n等分　ξ_i 取右端点

$a+\frac{i}{n}(b-a)$

a　$a+\frac{b-a}{n}$　$a+\frac{i-1}{n}(b-a)$　b

$a=0, b=1$

(3) 定义中区间的分法和 ξ_i 的取法是任意的.

(4)利用定积分的定义可求一些和式数列的极限.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left[\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right]\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$$

ξ_i

2.定积分存在的条件

定理1 当函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续时，

则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

即 有限区间上的连续函数是可积的.

定理2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，

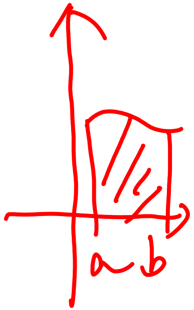
且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

充分条件

即 有限区间上只有有限个间断点的有界函数是可积的.

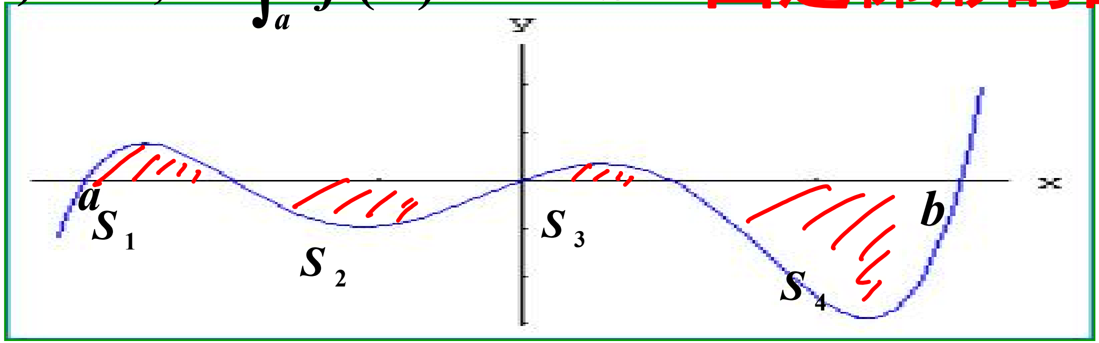
定理3 可积函数必定有界. —— 必要条件

3、定积分的几何意义



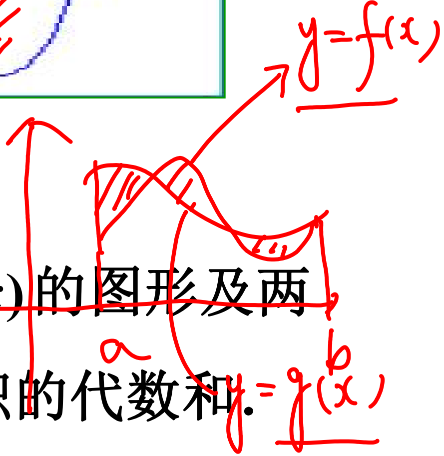
$f(x)\geq 0,\quad \int_a^b f(x)dx = S$ 曲边梯形的面积

$f(x)\leq 0,\quad \int_a^b f(x)dx = -S$ 曲边梯形的面积的负值



$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3 - S_4$$



$\int_a^b f(x)dx$是介于 x 轴、函数 $f(x)$的图形及两条直线 $x=a,x=b$ 之间的各部分面积的代数和.

一、定积分的性质：

1. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;

2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (k \neq 0$为常数$)$;

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

5. 若在$[a,b]$上，$f(x) \leq g(x)$，则$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx, (a < b)$

6. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

定义

线性性

(规定)

$f(x) \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq 0$

可加性

$f(x)\neq g(x)$，f、g连续

$<$

保号性

性质1 函数和、差的定积分等于定积分的和、差，即

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

证：

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx .$$

（此性质可以推广到有限多个函数作和的情况）

注1：若$f(x)+g(x)$在$[a,b]$上可积，则$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上不一定可积.

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\begin{cases} b-a \\ 0, \end{cases}$$

狄利克雷

如：$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$　　$g(x)=\begin{cases}0, & x\text{为有理数}\\ 1, & x\text{为无理数}\end{cases}$

则　　$f(x)+g(x)=1$,

显然$f(x)+g(x)$在$[0,1]$上可积，

但$f(x)$、$g(x)$在$[0,1]$上都不可积，

7.积分估值定理

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最大值和最小值分别为 M,m

则 $$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

8.积分中值定理

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$\xi\in[a,b]$

$$\int_a^b f(x)=f(\xi)(b-a)$$

如果 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $g(x)$ 不变号,则至少存在一点 $\boxed{\xi\in[a,b]}$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

三、积分上限的函数

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

注： 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续。

若 $f(x)$ 连续，$g(x),h(x)$ 可导，则

$$\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt\right)' = f[h(x)]h'(x) - f[g(x)]g'(x)$$

需注意的是，如果被积函数中有变量 x，一定要把其分离出来，或变到积分限上。

证 $G(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$

$G(x)=\int_a^x f(t)dt$

$$\Delta G = G(x+\Delta x)-G(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=\cancel{\int_a^x f(t)dt}+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\cancel{\int_a^x f(t)dt}$$

拆分性质

设

$\Delta x>0$

$$=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt= f(\xi)\Delta x \quad \underline{\xi\in[x,x+\Delta x]},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta G}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=\lim_{\underline{\xi\to x}} f(\xi)=f(x)$$

四、定积分的计算

1.牛顿—莱布尼茨公式

如果 $f(x)$ 连续且 $\int f(x)dx = F(x) + c$，

则 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

2.换元积分法 $x=\varphi(t)$ 换积分限

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

其中 $\alpha = \varphi^{-1}(a), \beta = \varphi^{-1}(b), \varphi^{-1}(t)$ 为 $\varphi(t)$ 的反函数

3.分部积分公式 $u(x)$, $v(x)$ 连续

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

V研客 在线教育 www.vyanke.com

4.利用奇偶性、周期性及几何意义

1)奇偶函数在对称区间上的定积分

拆分 $f=f_1+f_2$ $\int_{-a}^{b}=\int_{-a}^{a}+\int_a^b$ 拆分区间

若 $f(x)$ 为 $[-a,a]$ 上奇函数,则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

若 $f(x)$ 为 $[-a,a]$ 上偶函数,则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$

$\int_{0}^{2\pi}\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x+\sin^8 x}dx=0$

2)设f(x)是以T为周期的函数

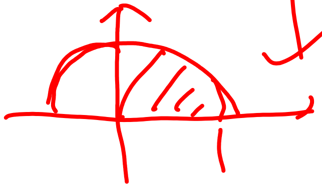
$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx=\int_{0}^{T} f(x)dx=\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx=\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{3}{4}T}$$

$$\int_{0}^{nT} f(x)dx=n\int_{0}^{T} f(x)dx$$

3)几何意义

$y=\sqrt{1-x^2}$

$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$



5.利用重要公式

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx$

$$1)\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

$\int_a^b f(x)\,dx$　　区间再现公式

$x = a+b-t$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数,} \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot 1, & n\text{为大于1的正奇数.} \end{cases}$$

$x = \pi - t$

$I = -\int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin t)\,dt$

$$2)\ \int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t)\,dt$　(解方程

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

（微积分基本公式）

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$F(x)$是$f(x)$的任意一个原函数，则

Xiboliu@163.com

$G(b)$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

证 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$也是$f(x)$的一个原函数，

$$\therefore F(x)-G(x)=C \quad x\in[a,b]$$

令 $x = a \Rightarrow F(a)-G(a)=C,$

$$G(a)=\int_a^a f(t)dt=0 \Rightarrow F(a)=C,$$

$$\because F(x)-\int_a^x f(t)dt=C, \quad x=b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

常考题型与典型例题

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

一、概念及性质

例1　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]$

n次f

解：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+(n-1)}+\frac{1}{2n}\right]$

$n+n$　$1\ \ 1+\frac{1}{n}\ \ 2$　$0\ \ \frac{1}{n}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})}+\frac{1}{n(1+\frac{2}{n})}+\cdots+\frac{1}{n(1+\frac{n-1}{n})}+\frac{1}{n(1+\frac{n}{n})}\right]$

$f(x)$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\boxed{\frac{i}{n}}}\cdot\boxed{\frac{1}{n}}$　ξ_i　ξ_i　Δx_i

$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$　$=\int_1^2\frac{1}{x}dx$

和式可理解为：$\frac{1}{1+x}$ 在区间[0,1]上的一个积分和，分割是将 [0,1]n等分，因 $\frac{1}{1+x}$ 在[0,1]上连续，所以在 [0,1]是可积 .

例 2(2012-2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$ ________.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)$

0 Δx_i

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{2}{n}\right)^2+1}+\cdots+\frac{1}{\left(\frac{n}{n}\right)^2+1}\right]\cdot\frac{1}{n}$$

ξ_1 ξ_2 ξ_n

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

例 3(2016-23) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)=$ ________.

【解】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)$$

Δx_i　ξ_1　ξ_2　ξ_n

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)$$

0　1

$f(x)=x\sin x$

$$=\int_0^1 x\sin x\,dx=-\int_0^1 x\,d\cos x$$

$$=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x\,dx=\sin 1-\cos 1.$$

例 4(2017-123) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln(1+\dfrac{k}{n})$. 10分

【解】

ξ_k Δx_i

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln(1+\frac{k}{n})\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)dx^2$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2-1+1}{1+x}dx$$

假分式

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1(x-1+\frac{1}{1+x})dx=\frac{1}{4}.$$

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \hline x+1 & x^2 \\ & x^2+x \\ \hline & -x \\ & -x-1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\frac{x^2}{1+x}=x-1+\frac{1}{x+1}$$

2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2021年1月

考试内容及试题类型(新大纲预计)

类型	内容	选择题		填空题		解答题		百分比	合计	总分
		个数	分数	个数	分数	个数	分数			
数学一	高数	6	30	4	20	4	40	60%	90	150
	线代	2	10	1	5	1	15	20%	30	
	概统	2	10	1	5	1	15	20%	30	
数学二	高数	8	40	5	25	5	55	80%	120	150
	线代	2	10	1	5	1	15	20%	30	
数学三	高数	6	30	4	20	4	40	60%	90	150
	线代	2	10	1	5	2	15	20%	30	
	概统	2	10	1	5	2	15	20%	30	

考试内容及试题类型(新大纲实际)

类型	内容	选择题		填空题		解答题		百分比	合计	总分
		个数	分数	个数	分数	个数	分数			
数学一	高数	4 6	20	4	20	4	10+3×12 46	57.33%	86 90	150
	线代	3 2	15	1	5	1	12	21.33%	32 30	
	概统	3 2	15	1	5	1	12	21.33%	32 30	
数学二	高数	7	35	5	25	5	58	78.66%	118	150
	线代	3	15	1	5	1	12	21.33%	32	
数学三	高数	4	20	4	20	4	46	57.33%	86	150
	线代	3	15	1	5	2	12	21.33%	32	
	概统	3	15	1	5	2	12	21.33%	32	

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

数1、2　求极限$\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right]$.　(10分)

"基础"　"$\infty-\infty$"?

答案：1/2

V研客 在线教育 www.vyanke.com

数 3　已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，求 a 的值

求的极限 $x\to 0^+$

(10分)

?

区间线

答案：$\frac{1}{\pi}(\frac{1}{e}-e)$

2021年高等数学（微积分）试题分布

	函数极限连续	一元微分	一元积分	多元微分	二重积分	微分方程	级数	解析几何	线面积分
数一	10	15	10	17	6	5	全覆盖 12	0	5+6
数二	20	37+6	17	10	17	5+6	—	—	—
数三	15	15	10	17	12	5+6	6	—	—

2021年高等数学（微积分）相同试题

	数学一	数学二	数学三
数一		选 填 解答 15+5+10	10+0+12
数二	15+5+10		20+0+0
数三	10+0+12	20+0+0	

几个特征（延续了以往的考查）

1、注重基础（基础知识、基本理论、基本方法和技巧）

2、考查能力（特别是计算能力）

3、综合性

4、没有偏题、怪题（有个别难题）

2021试题特点

1、关注低频考点

2、新增内容体现不充分

3、客观题难度加大

4、解答题综合性加强

定积分

1° 定义(12个性质—小结(求数列的极限)

2° 计算—限定

(2021 数学 1、2)函数 $f(x)$ 在[0，1]上连续，则 $\int_0^1 f(x)dx=$

答案：B

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{2n}$.

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$.

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$.

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{2}{n}$.

$$\frac{\frac{k-1}{n}+\frac{k}{n}}{2}$$

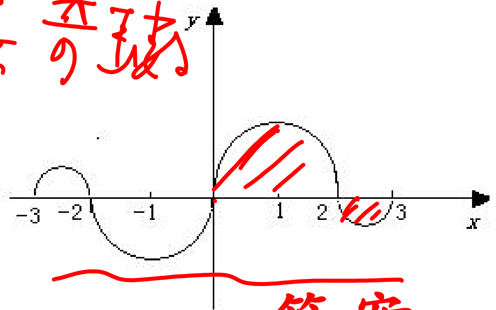
n等分

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

0 $\quad \frac{1}{n} \quad \frac{k-1}{n} \quad \frac{k}{n} \quad$ 1

例 5(2007-123) 如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0],[0,2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周，设 $F(x)=\boxed{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$，则下列结论正确的是：

连续 奇函数



（A） $F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$　　(B) $F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

（C） $F(3)=\dfrac{3}{4}F(2)$　　（D） $F(3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$

答案：C

【解】利用定积分的几何意义，可得

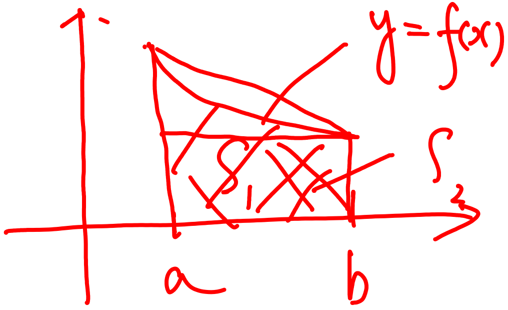
$$F(3)=\frac{1}{2}\pi 1^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}\pi,\quad \overset{F(-2)}{\overset{\parallel}{F(2)}}=\frac{1}{2}\pi 1^2=\frac{1}{2}\pi,$$

$$F(-2)=\int_0^{-2} f(x)\mathrm{d}x=-\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi 1^2=\frac{1}{2}\pi.$$

所以 $F(3)=\dfrac{3}{4}F(2)=\dfrac{3}{4}F(-2)$，故选（C）.

例 6(1997-12)设在区间$[a,b]$上，

$$f(x)>0,\ f'(x)<0,\ f''(x)>0$$



令 $S_1=\int_a^b f(x)dx,\ S_2=f(b)(b-a),$

$S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则

（A） $S_1<S_2<S_3$ （B） $S_2<S_1<S_3$

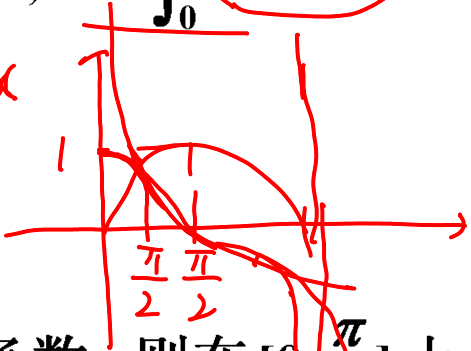
（C） $S_3<S_1<S_2$ （D） $S_2<S_3<S_1$

分析：利用几何意义 **答案：B**

例 7(2011-123) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$，则 I,J,K 的大小关系是

$[0,\frac{\pi}{4}]$

$\sin x \le \cos x \le \cot x$



(A) $I<J<K$.　　(B) $I<K<J$.

(C) $J<I<K$.　　(D) $K<J<I$.

【解】 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上，$\sin x\le\cos x\le\cot x$，且 $\ln x$ 是增函数，则在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上，$\ln\sin x\le\ln\cos x\le\ln\cot x$，且它们不恒等．由定积分的保号性

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx<K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx<J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx.$$

【答案】(B)．

例 8(2017-2) 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$，且 $f''(x)>0$，则

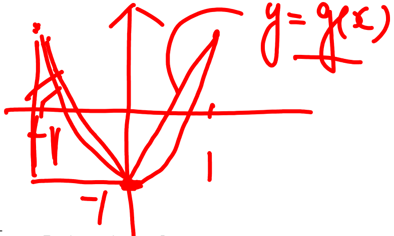
凹 f_n 　 取 $f(x)=2x^2-1$

$\int_{-1}^{1} = 2\int_0^1 (2x^2-1)dx$

(A) $\int_{-1}^{1} f(x)dx > 0$. 　　(B) $\int_{-1}^{1} f(x)dx < 0$.

(C) $\int_{-1}^{0} f(x)dx > \int_{0}^{1} f(x)dx$. 　　(D) $\int_{-1}^{0} f(x)dx < \int_{0}^{1} f(x)dx$.

<0



【解】 曲线 $y=f(x)$ 是凹的，其上任意两点间的弧均在过这两点的割线下方.

$f(x)<g(x)$

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)<f(0)+\dfrac{f(-1)-f(0)}{-1}x=-2x-1$；

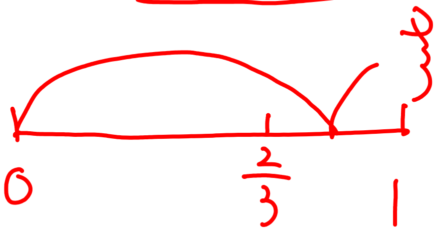
当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<f(0)+\dfrac{f(1)-f(0)}{1}x=2x-1$.

故
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx$$
$$<\int_{-1}^{0}(-2x-1)dx+\int_{0}^{1}(2x-1)dx=0.$$

【答案】(B).

例 9(1991-12) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx = f(0)$，证明在在 $(0,1)$ 内存在一点 c,使得则 $\boxed{f'(c)=0.}$ 罗尔定理

【证明】 积分中值定理



$\exists\, \xi \in (\frac{2}{3}, 1)$ 有

$$3 \times f(\xi) \times \frac{1}{3} = f(0)$$

$f(x)$ 在 $[0, \xi]$ 上用罗尔定理

$\exists\, c \in (0, \xi) \subset (0,1)$ 有

$$f'(c) = 0$$

$+\int_0^2 f(x)dx$

补例、 设 $f(x) = 4x - \boxed{\int_0^1 f(x)dx}$ 求 $f(x)$ B

数 A 关于A

对右的列方程

分析： 令 $A = \int_0^1 f(x)dx$

$f(x)=4x-A$

则 $\overset{A}{\int_0^1 f(x)dx} = \int_0^1 4xdx - \int_0^1 Adx$

有 $A = 2 - A, A = 1,$

从而 $f(x) = 4x - 1$

二、定积分的计算

例 10(2001-2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x dx =$ ________

奇偶性一积分

奇

偶

(送2分)

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos^2 x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^2 x dx$

$= \frac{\pi}{8}$

1°

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^2 x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x - \cos^4 x)dx = 2\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)$

2°

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2x)dx \quad = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)dx$

$= \frac{\pi}{8}$

例 11(2017-3) $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})dx=$ ________.

奇

【解】 $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})dx$

几何意义

$y=\sqrt{\pi^2-x^2}$

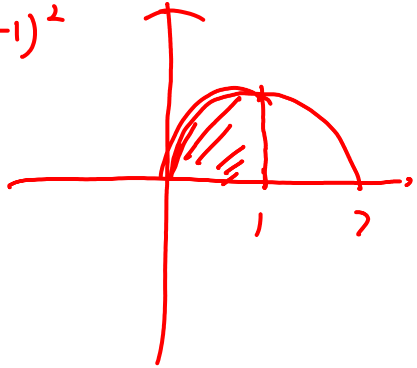
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}dx=\frac{\pi^3}{2}.$$

$x=\pi\sin t$

例 12(2000-1) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2})dx =$ $\int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$.

几何意义 $\frac{\pi}{4}$

$y=\sqrt{1-(x-1)^2}$



V研客 在线教育 www.vyanke.com

例 13 $I=\int_0^{\pi} x\sin^2 xdx =$ 1° 分部 f ... $\frac{\pi}{4}$ ________.

$\frac{1}{2}d\sin 2x$

法一、降幂+分部

$I=\int_0^{\pi} x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\,dx-\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cos 2x\,dx$

$I=\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx \xlongequal{x=\pi-t} =\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$

法二、用结论

$$\int_0^{\pi} x\sin^2 xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^2}{4}$$

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

例 14(2005-2) $\int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} =$ ______.

【解】 令 $x=\sin t$，则

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\cancel{\cos t}}{(2-\sin^2 t)\cancel{\cos t}}dt$$

u

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\boxed{\cos t}}{1+\cos^2 t} = -\arctan(\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

例 15(2010-1) $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos\sqrt{x}\,dx =$ ________.

【解】 令 $\sqrt{x} = t$，则 $x = t^2$，$dx = 2tdt$. 因而

$$\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos\sqrt{x}\,dx = \int_0^{\pi} 2t^2 \cos t\,dt = 2\int_0^{\pi} t^2 d\sin t$$

$$= 2\left[t^2 \sin t\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2t \sin t\,dt \right] = 4\left[\int_0^{\pi} t\,d\cos t \right]$$

$$= 4\left[t\cos t\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos t\,dt \right] = -4\pi.$$

例 16、 计算 $\int_0^1 x\arcsin x\,dx$ ________.

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \arcsin x\, dx^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arcsin x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad x=\sin t$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

例 17(1995-3)设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}dt$，求 $\int_0^\pi f(x)dx$

（分部积分）

$f'(x)=\frac{\sin x}{\pi - x}$

解：$\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi f(x)d(x-\pi)$

$$=(x-\pi)f(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi (x-\pi)f'(x)dx$$

$$=0-\int_0^\pi \cancel{(x-\pi)}\frac{\sin x}{\cancel{\pi-x}}dx$$

$$=\int_0^\pi \sin x\,dx = 2$$

分析

$$I = xf(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi xf'(x)dx$$

$$= \pi f(\pi) - \int_0^\pi x\cdot\frac{\sin x}{\pi - x}dx$$

三、变上限定积分

（命中考点） 1° 求导 2° 积分

例 18、 设 $f(x)$ 连续，计算下列函数的导数

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$

$\Rightarrow \int_a^x f(t)dt$ 可导

$$(1)\left(\int_{e^x}^{x^2} f(t)dt\right)' \qquad (2)\left[\int_0^x (x-t)f(t)dt\right]'$$

$$= 2xf(x^2) - e^x f(e^x)$$

$$= \left[x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt\right]'$$

$$= \int_0^x f(t)dt + \cancel{xf(x)} - \cancel{xf(x)}$$

$$\left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} a(x) f[\underbrace{b(x,t)}_{=u}]dt\right]' = ?$$

$(3)\left(\int_0^x \cos(x-t)^2 dt\right)'$

$\overset{u=x-t}{=} \left(-\int_x^0 \cos u^2 du\right)'$

$= \left(\int_0^x \cos u^2 du\right)'$

$= \cos x^2$

$(4)\left(\int_1^2 f(x+t)dt\right)' \neq 0$

$\overset{u=x+t}{=} \left(\int_{x+1}^{x+2} f(u)du\right)'$

$= f(x+2) - f(x+1)$

V研客 在线教育 www.vyanke.com

例 19(2015-23) 设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2} xf(t)dt$，若 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$，则 $f(1)=$______.

$\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt=1 \quad \varphi'(1)=?$

【解】 由已知 $\varphi(x)=x\int_0^{x^2} f(t)dt$，方程两边对 x 求导得

$$\varphi'(x)=\int_0^{x^2} f(t)dt+2x^2f(x^2),$$

故有
$$\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt=1,\ \varphi'(1)=1+2f(1)=5,$$

进而
$$f(1)=2.$$

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

例 20(1998-1) 设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt =$

$-\frac{1}{2}d(x^2-t^2)$

$u=x^2-t^2$

$\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=-\frac{1}{2}\int_{x^2}^{0}$

答案：A

(A) $xf(x^2)$　　(B) $-xf(x^2)$

(C) $2xf(x^2)$　　(D) $-2xf(x^2)$

所求 $=+\frac{1}{2}f(x^2)\cdot 2x$

V研客 在线教育 www.vyanke.com

f(x)可积

例 21(1993-3) $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x\le 2 \end{cases}$, $F(x)=\int_1^x f(t)dt(0\le x\le 2)$

可导

$0\le x<1$ $F(x)=\int_1^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}$

答案：D

则 $F(x)$ 为

$1\le x\le 2$ $F(x)=\int_1^x 1\,dx=x-1$

(A) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0\le x<1 \\ x, & 1\le x\le 2 \end{cases}$, ×

(B) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\le x<1 \\ x, & 1\le x\le 2 \end{cases}$,

× (C) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0\le x<1 \\ x-1, & 1\le x\le 2 \end{cases}$,

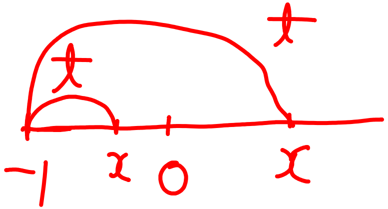
(D) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\le x<1 \\ x-1, & 1\le x\le 2 \end{cases}$ ✓

例 22(1988-2) 设 $x \geq -1$，求 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$

分析

$-1 \leq x < 0$ 时 $\int_{-1}^{x}(1+t)dt$

$0 \leq x$ 时 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt = \int_{-1}^{0}(1+t)dt + \int_{0}^{x}(1-t)dt$



例 23(2013-2) 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in[0,\pi),\\ 2, & x\in[\pi,2\pi].\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则

求出　连续

(A) $x=\pi$ 为 $F(x)$ 的跳跃间断点.　　(B) $x=\pi$ 为 $F(x)$ 的可去间断点.

(C) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续不可导.　　(D) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导.

【解】由于 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上只有第一类间断点 $x=\pi$，其在 $[0,2\pi]$ 上一定可积，所以 $F(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上一定连续，且 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处不可导. 故选(C).

1° $0\le x<\pi$　$F(x)=\int_0^x \sin t\,dt=-\cos x+1$

2° $\pi\le x\le 2\pi$　$=\int_0^\pi \sin t\,dt+\int_\pi^x 2\,dt$

$F'_-(\pi)=0$ $\neq$ $F'_+(\pi)=2$

【注】实际上，可计算 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}-\cos x+1, & x\in[0,\pi),\\ 2x-2\pi+2, & x\in[\pi,2\pi].\end{cases}$

例 24(1998-2) 确定常数 a, b, c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c \quad (c\neq 0)$.

抓住同阶

分子→0

解 由 $\lim\limits_{x\to 0}(ax-\sin x)=0$，$c\neq 0$，可知 ⇒ 分母→0

$$\lim_{x\to 0}\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt=\int_b^0 \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt=0.\quad 于是\ b=0.$$

$t<0$，$t>0$

洛 $\frac{0}{0}$

$a=1$

$$又\ \lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}=c,$$

分母→0 ⇒ 分子→0

故 $a=1$，$c=\dfrac{1}{2}$. 即 $a=1$，$b=0$，$c=\dfrac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

例 25(2017-23) 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x \sqrt{x-t}\,e^t\,dt}{\sqrt{x^3}}$.

$\dfrac{"0"}{0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x-\xi}\,e^{\xi}x}{\sqrt{x^3}}$　$0<\xi<x$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x-\xi}}{\sqrt{x}}$

$x-t=u$

【解】 令 $\sqrt{x-t}=u$，则　$t=(u^2-x)=x-u^2$

$$\int_0^x \sqrt{x-t}\,e^t\,dt = -\int_{\sqrt{x}}^0 2u^2 e^{x-u^2}\,du = e^x\int_0^{\sqrt{x}} 2u^2 e^{-u^2}\,du .$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{x-t}\,e^t\,dt}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\int_0^{\sqrt{x}} 2u^2 e^{-u^2}\,du}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}} 2u^2 e^{-u^2}\,du}{\sqrt{x^3}}$$

$x^{\frac{3}{2}}$　$\dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{2xe^{-x}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{3}{2}\sqrt{x}} = \frac{2}{3}.$$

$f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上

$\exists\,\xi\in(a,b)$　$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$

例 26(2010-3) 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} e^{-t^2}dt = \int_0^x x\sin^2 t\,dt$ 确定，

则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0} =$ ________ .

隐函数 $\Rightarrow \int_0^y e^{-t^2}dt = 0 \Rightarrow y=0$　　$y(0)=x\int_0^x \sin^2 t\,dt$

【解】 由 $\int_0^{x+y} e^{-t^2}dt = \int_0^x x\sin^2 t\,dt$，令 $x=0$，得 $y=0$，

$(x+y)'$　　0

等式两端对 x 求导得　$e^{-(x+y)^2}\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right) = \int_0^x \sin^2 t\,dt + x\sin^2 x$ ，

将 $x=0$，$y=0$ 代入上式，得　$1+\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 0$，　所以　$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = -1.$ ✓

第二节 反常积分

不定积分

一定函数

$\int f(x)dx$

$=F(x)+C$

定积分

$\int_a^b f(x)dx$

数

广义

$[a,b]$ — 有限

$f(x)$ — 有界

1° 判断敛散性 < 定义 / 比较判别法

2° 计算

形式

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$

数

考试内容概要

一、无穷限的反常积分

定积分+极限 发散

设 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 一般

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上连续，$\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在，则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 收敛,且 $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

一、无界函数的反常积分

瑕积分　　$[a+\varepsilon, b]$　　连续　　混合型

设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ 存在，则

称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，且 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^3}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^3}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x^3}dx$　$=0$ ✗

设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$，且 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ 存在，则

称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，且 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 除 c 外连续，$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$

$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^c+\int_c^b+\int_b^{+\infty}$

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 除点 $c\in(a,b)$ 上连续，而在点 c 的邻域内无界，

且反常积分 $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 收敛，则反常积分 $\int_a^b f(x)dx$

收敛，且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

二、反常积分的比较判别法

1、无穷限反常积分的比较判别法

(不等式形式)设两个非负函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\le g(x)$，若反常积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛,则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 一定收敛

(极限形式)设两个非负函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，

$x^p f(x)$

且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$，则

1) 当 $0<c<+\infty$ 时，反常积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 同敛散；

2) 当 $c=0$ 时，若反常积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛,则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 一定收敛

3) 当 $c=+\infty$ 时，若反常积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散；

注:考虑 $g(x)=\dfrac{1}{x^p}$ $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx$

2、无界函数反常积分的比较判别法

（不等式形式）设两个非负函数 $f(x),g(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，$f(x)\le g(x)$，若反常积分 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)dx$ 一定收敛

（极限形式）设两个非负函数 $f(x),g(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，

且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$，则

$(x-a)^p f(x)$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^p}$ $\quad \int_a^b \dfrac{1}{(x-a)^p}dx$

1) 当 $0<c<+\infty$ 时，反常积分 $\int_a^b g(x)dx$ 与 $\int_a^b f(x)dx$ 同敛散；

2) 当 $c=0$ 时，若反常积分 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)dx$ 一定收敛

3) 当 $c=+\infty$ 时，若反常积分 $\int_a^b g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散；

注：考虑 $g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^p}$

例、讨论 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right|dx$ 的敛散性

$\leq \frac{1}{1+x^2}dx$

$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛 —— (绝对收敛)

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

例、讨论 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^7}}dx$ 的敛散性

发散 $\int^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$

收敛 $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^7}} \leq \frac{x^2}{x^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

例、讨论 $\int_1^2\frac{\sqrt{x}}{\ln x}dx$ 的敛散性

发散

$\int_1^2\frac{1}{(x-1)^p}dx$

当 $x\to1$

$\ln x = \ln(1+x-1) \sim x-1$

分析：$\lim_{x\to1^+}(x-1)\cdot\frac{\sqrt{x}}{\ln x} = 1$

四、常用的反常积分

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\tan x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ (了解)

(3) $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} +\infty, & p \le 1 \\ \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & p > 1 \end{cases} (a > 0)$

(4) $\int_0^{a} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{1-p}, & p < 1 \\ +\infty, & p \ge 1 \end{cases} (a > 0)$

常考题型与典型例题

一、反常积分的敛散性

例 1(2015-2) 下列反常积分收敛的是【　　】

发散　　　　发散　　　　定义　　　　发散

(A) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$. (B) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$. (C) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$. (D) $\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$.

$\frac{1}{2}<1$　　$x^{\frac{1}{2}}$

$\infty \leftarrow \frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_2^{+\infty} = \int_2^{+\infty}\ln x\, d\ln x$　发散

【解】 $\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_2^{+\infty} = 3e^{-2} - \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x} = 3e^{-2}$.

答案：D

例 2(2013-2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e,\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge e.\end{cases}$,若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则

答案：D

原问题 $=\int_1^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx+\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx$ 均收敛

$\alpha-1<1$

$\alpha<2$

(A) $\alpha<-2$. (B) $\alpha>2$. (C) $-2<\alpha<0$. (D) $0<\alpha<2$.

$\frac{1}{\ln^{\alpha}x}$

【分析】

$$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{-\alpha}\ln^{-\alpha}x\Big|_e^{+\infty}=\frac{1}{-\alpha}\lim_{x\to+\infty}\ln^{-\alpha}x+\frac{1}{\alpha}$$，有 $\alpha>0$；

例 3(2016-2) 反常积分① $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$，② $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 的敛散性为

(A) ①收敛，②收敛.　　(B) ①收敛，②发散.

(C) ①发散，②收敛.　　(D) ①发散，②发散.

$-$ 凑微分

分析 $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx = -\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}$

$= -e^{\frac{1}{x}}\Big|_{-\infty}^{0} = 1$

$-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{0}^{+\infty} = +\infty$

答案：B

例 4(2016-1) 若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛，则

$= \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$

瑕 无限

(A) $\underline{a}<1$ 且 $b>1$. (B) $a>1$ 且 $b>1$.

(C) $a<1$ 且 $a+b>1$. (D) $a>1$ 且 $a+b>1$.

1° $\lim\limits_{x\to0^+} x^a\cdot\frac{1}{x^a(1+x)^b}=1$ $\quad \int_0^1\frac{1}{x^a}dx \Rightarrow a<1$ $\quad \underline{a+b>1}$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{a+b}}dx$ ✓

2° $\int_1^{+\infty}$? ✓ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^{a+b}\cdot\frac{1}{x^a(1+x)^b}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{x})^b}=1$

答案：C

二、反常积分的计算

换元积分法

例 5(2000-2) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}=\frac{\pi}{3}$.

$\int_2^3 + \int_3^{+\infty}$

分析：令 $\sqrt{x-2}=t \Longrightarrow x=2+t^2$

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{2\cancel{t}\,dt}{(9+t^2)\cdot\cancel{t}}=\frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{3}$$

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

例 6(2000-4) 计算 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{2-x}}$. $=\frac{\pi}{4e}$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{e^x}{e^2+(e^x)^2}dx$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{de^x}{e^2+(e^x)^2}$$

$$=\frac{1}{e}\arctan\frac{e^x}{e}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{e}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4e}$$

例 7(2013-13) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$ ____ $\ln 2$ ____ . ([illegible])

$$=-\int_1^{+\infty}\ln x\, d\frac{1}{1+x}$$

$$=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx$$

$$=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx=\cancel{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx-\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x}dx}$$

$$=\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}=\ln 2$$