2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2020年11月

第二章 导数与微分

掌握要点

$(x^a)' =$ ______ $(a^x)' = a^x\ln a$

一、熟记求导公式和求导法则(基本功) $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$

二、导数的定义（小题出现，常考）

三、分段函数的导数（重点，与其他知识点结合）

四、变限积分求导（几乎每年涉及）

五、高阶导数（难点）

考试要求

1、理解导数和(了解)微分的概念，理解(了解)导数与微分的关系，理解 (了解)导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程和法线方程，了解导数的物理意义（经济意义，含边际和弹性），会用导数描述一些物理量，理解函数的可导性与连续性之间的关系。

2、掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的导数公式，了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，会求函数的微分。

3、了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数。

二阶

4、会求分段函数的导数。会求隐函数和由参数方程（数一、二）所确定的函数以及反函数的导数。

考试内容概要

一、导数与微分的概念

1、导数

$U(x_0,\delta)$

(1)定义：设函数 $y=f(x)$在点 x_0的某个邻域内有定义，当自变量 x在 x_0处取得改变量 $\Delta x(\Delta x\neq 0)$时，相应地函数 $f(x)$的改变量

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$　　$x_0+\Delta x$

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0);$$

如果Δy与Δx之比当$\Delta x\to 0$时的极限存在，则称函数 $y=f(x)$在点 x_0处可导，并称这个极限为函数 $y=f(x)$在点 x_0处的导数，记为$y'\big|_{x=x_0}$，

或记为 $f'(x_0)$或 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$，

即 $$y'\Big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\underline{\Delta x}}$$

其它形式 $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overbrace{x_0 + h}^{=x}) - f(x_0)}{h}.$$

$$f'(x_0) = \lim_{\underline{x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

(2)单侧导数

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to \cancel{x}_0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to \cancel{x}_0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

函数 $f(x)$在点 x_0处可导 $\Leftrightarrow$ 左导数 $f'_-(x_0)$和右导数 $f'_+(x_0)$都存在且相等．

$f'(x_0^+)$ $\parallel$ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$

$f'_+(x_0)$ 右导数

关于导数的说明：

- ★ $f'(x_0)$是因变量在点 x_0处的变化率，它反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度.

(a,b] 可导

- ★ 如果函数 $y=f(x)$在开区间 (a,b)内的每点处都可导，就称函数 $f(x)$在开区间 (a,b)内可导.

$$\frac{dy}{dx}=dy\cdot\frac{1}{dx}$$

- ★ 对于任一 $x\in(a,b)$，都对应着 $f(x)$的一个确定的导数值.这个函数叫做原来函数 $f(x)$的导函数.记作

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx}\ 或\ \frac{df(x)}{dx}.$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}.$$

即 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 或 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

- ★ 如果函数 $f(x)$在开区间 (a,b)内可导，且$f'_+(a)$和$f'_-(b)$都存在，则称$f(x)$在闭区间 $[a,b]$上可导.

(3) 可导与连续的关系

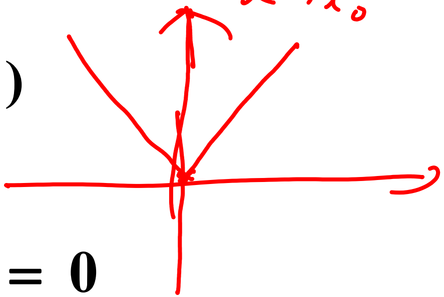
函数 $f(x)$在点 x_0处可导,则它 在点 x_0处一定连续.反之不成立.

证 设函数 $f(x)$在点 x_0可导, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$x \to x_0$

$\Delta x \to 0^+$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha \qquad \alpha\to 0 \quad (\Delta x\to 0)$$

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x]=0$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$在点 x_0连续 .

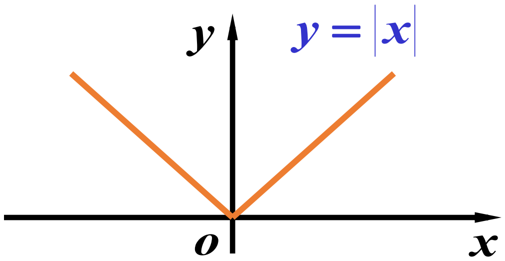
注: 左导数存在⇒左连续，右导数存在⇒右连续

左导数存在+右导数存在⇒连续

例1 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处的连续性与可导性.

解 因 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0,\qquad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0,$

即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0,$



所以 $f(x)$在 $x=0$处连续.

但 $\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x},$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

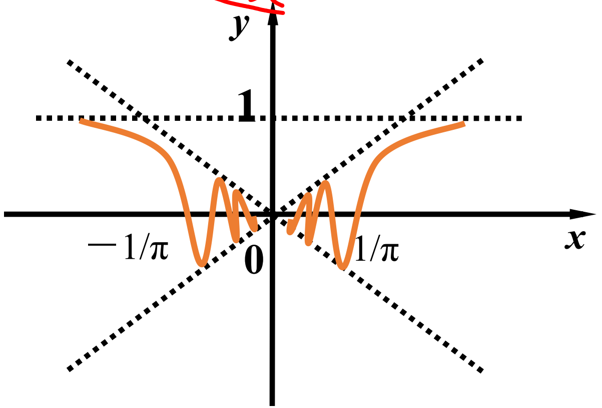
$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

即 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$, 因此函数 $y=f(x)$在$x=0$点不可导.

例2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性 .

$\sin\frac{1}{x}$

$x^2\sin\frac{1}{x}$



解 $\because \sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数 ， $\therefore \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

$\because f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 .

但在 $x=0$ 处有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(0+\Delta x)\sin\dfrac{1}{0+\Delta x}-0}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}$$

当 $\Delta x\to 0$ 时, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 -1 和 1 之间振荡而极限不存在 .

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导 .

例3. 已知 $y=\begin{cases} a+bx, & x\le 0 \\ e^{-x}, & x>0 \end{cases}$ 在$x=0$可导，求a, b之值.

解： $\because$ $f(x)$在 $x=0$ 可导， $\therefore$ $f(x)$在 $x=0$连续，$f(0)=a$

又 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x}=1$ 故 $a=1$.

从而 $f(x)=\begin{cases} 1+bx, & x\le 0 \\ e^{-x}, & x>0 \end{cases}$ $f(0)=1$

由可导性:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{e^{-\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(1+b\Delta x) - 1}{\Delta x} = b$$

故 $b = -1$, 此时函数为

此时, $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \le 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$

例 3(1994-3)、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3}{3}, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$ 则 $f(x)$ 为在 x=1 处的

a^n-b^n　　$x^3-1=(x-1)$

（A）左、右导数都存在.　　（B）左导数存在但右导数不存在.

（C）左导数不存在但右导数存在.　　（D）左、右导数都不存在.

【解 1】 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+x+1)=2$,

老技巧

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty$,

左导数存在但右导数不存在.

答案：B

$(-\infty, 1]$

例 3(1994-3)、 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3}{3}, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$ 则 $f(x)$ 为在 $x=1$ 处的

（A）左、右导数都存在.　　（B）左导数存在但右导数不存在.

（C）左导数不存在但右导数存在.　　（D）左、右导数都不存在.

不右连续⇒右导数不∃

【解 2】 $f'_-(1)=\left(\dfrac{2}{3}x^3\right)'\Bigg|_{x=1}=2$，而 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}x^2=1\neq f(1)$

左导数存在但右导数不存在.

答案：B

注： 避免错误 $f'_+(1)=\left(x^2\right)'\Big|_{x=1}\cancel{=}2$，而得到 $f'(1)=2$.

例 4(1990-45)设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$，且有 $f'(0)=b$，其中 a，b 为非零常数，则

(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.　　(B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=a$.

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=b$.　(D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=ab$.【　】

【详解】由导数定义知

$\cancel{0}+0$

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{af(\Delta x)-af(0)}{\Delta x}$$

$$=a\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=af'(0)=ab.$$

所以应选(D).

2、微分

(1)定义：设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内，如果

近似计算

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$$

成立(其中 A 是与 Δx 无关的常数)，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微，并且称 $A\cdot\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分，记作

$$dy\Big|_{x=x_0} \text{ 或 } df(x_0), \text{ 即 } dy\Big|_{x=x_0} = A\cdot\Delta x.$$

$=\Delta dx$

微分 dy 叫做函数增量 Δy 的线性主部.

(微分的实质)

(2)可微的条件

函数 $f(x)$在点 x_0可微的充要条件是函数 $f(x)$在点 x_0处可导，且 $A = f'(x_0)$.

证　必要性　$f(x)$在点x_0可微，

$$\therefore \Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

则 $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

即函数 $f(x)$在点 x_0可导，且$A = f'(x_0)$.

充分性　函数$f(x)$在点x_0可导，$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$，即 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$，

$\alpha \to 0 \quad (\Delta x \to 0)$，

$$从而\ \Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot (\Delta x) \to 0$$

$$= f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

$f(x)$在x_0可微，且$f'(x_0) = A$.

例 5(1988-123)若函数 $y=f(x)$有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则该函数在 $x=x_0$ 处的微分 dy 是

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{dy}{\Delta x}=\frac{1}{2}\neq 0$

(A) 与 Δx 等价的无穷小.　　(B) 与 Δx 同阶的无穷小.

(C) 比 Δx 低阶的无穷小.　　(D) 比 Δx 高阶的无穷小.

【分析】 $dy=f'(x_0)\Delta x=\frac{1}{2}\Delta x$

答案：B

3、导数与微分的几何意义

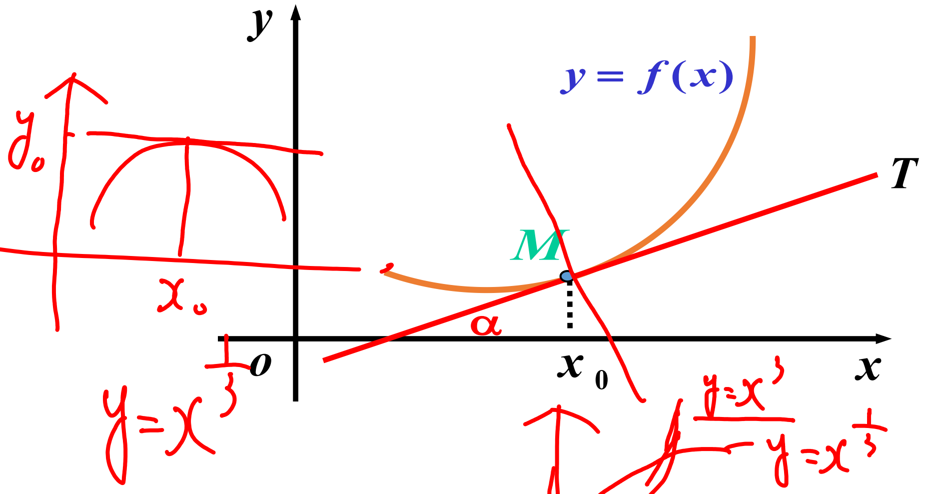
(1)导数的几何意义

$f'(x_0)$表示曲线 $y=f(x)$

在点$M(x_0,f(x_0))$处的

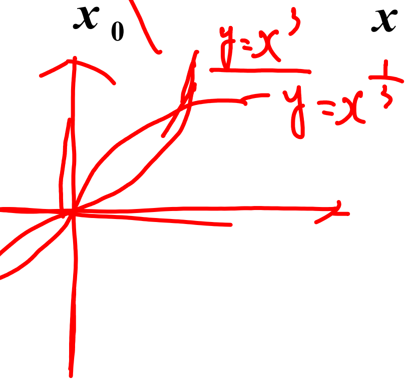
切线的斜率,即

$f'(x_0)=\tan\alpha$，　(α为倾角)



切线方程为:　$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$

法线方程为:　$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$



注：1)函数可导⇒曲线有切线，反之不然；

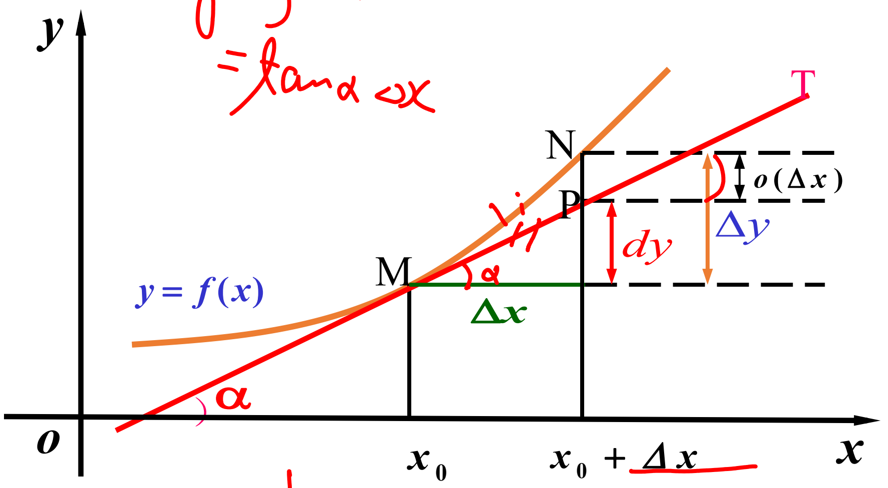
2)曲线有水平切线时

(2)微分的几何意义

以直代曲

函数$y = f(x)$的微分dy就是过点$M(x, y)$的切线的纵坐标的改变量.

$dy = f'(x_0)\Delta x = \tan\alpha\, \Delta x$



当$|\Delta x|$很小时，在点M的附近，切线段MP可近似代替曲线段MN.

$S = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$

$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{1+y'^2}\,dx$

(3)微分形式的不变性

设函数 $y=f(u)$有导数 $f'(u)$,

(1) 若u是自变量时， $dy=f'(u)du$;

$y=f[\varphi(x)]$

(2) 若u是中间变量时，即另一变量 x的可微函数 $u=\varphi(x)$, 则 $dy=f'(u)\varphi'(x)dx$

$\because du=\varphi'(x)dx$, $\therefore dy=f'(u)du$.

结论: 无论u是自变量还是中间变量, 函数 $y=f(u)$的微分形式总是 $\boxed{dy=f'(u)du}$

微分形式的不变性

例6 设 $y=\ln(x+e^{x^2})$，求 dy.

$u=x+e^{x^2}$

解

$$dy=\frac{1}{x+e^{x^2}}d(x+e^{x^2})$$

$$=\frac{1}{x+e^{x^2}}\cdot(dx+de^{x^2})$$

$$=\frac{1}{x+e^{x^2}}\cdot[dx+e^{x^2}d(x^2)]$$

$$=\frac{1}{x+e^{x^2}}\cdot(dx+2xe^{x^2}dx)$$

$$=\frac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}dx.$$

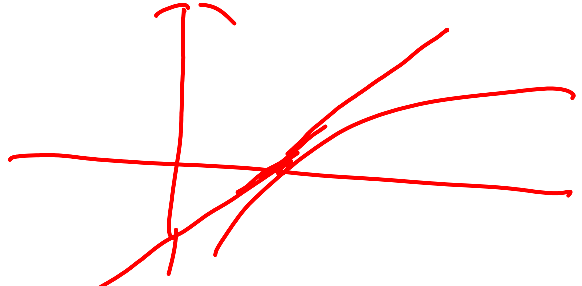
y'

例 7（2004-1） 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为 -1 ________.

1

【详解】 本题也可先设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，函数 $y=\ln x$ 在此切点的导数为

$(1,0)$



$$y'\big|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}=1,\ \text{得}\ x_0=1,$$

由此可知所求切线方程为 $y-0=1\cdot(x-1)$， 即 $y=x-1$.

4、几个概念之间的关系

可微 $\Leftrightarrow$ 可导 $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 连续 $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 极限存在（$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$）

例 8（2020-1）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$，则

$f(x)=|x|$

(A) 当 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(C) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

(D) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$. 【　　】

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$

【详解 1】当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，得 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，

则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{|x|}}=f'(0)\cdot0=0$. 故选(C).

$=\dfrac{x}{|x|}\cdot\dfrac{|x|}{\sqrt{|x|}}=\dfrac{x}{|x|}\cdot\sqrt{|x|}$

例 8（2020-1） 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, 则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(C) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$. $\dfrac{x}{|x|}$

(D) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$. 【　】

【详解 2】 可利用举反例排除错误答案.取 $f(x)=|x|$，排除(A)；

f(x)在x=0处
不连续

取 $f(x)=\begin{cases} x^2, x\neq 0, \\ 1, x=0. \end{cases}$， 排除(B)； 取 $f(x)=x$， 排除(D).

二、导数公式和求导法则

1、基本初等函数的导数公式

$(C)' = 0$

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(arc\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

2、求导法则

(1)函数的和、差、积、商的求导法则

1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$;　用定义(导数)

2) $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0)$.

注：(1) $[u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)]'=u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots+u_n'(x)$

(2) $[u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)]'=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$

$+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$.

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x) - u(x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x) - u(x) \cdot \dfrac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x) - u(x) \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

(2)、复合函数的求导法则

如果函数$u=\varphi(x)$在点x_0可导，而$y=f(u)$在点$u_0=\varphi(x_0)$可导，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x_0可导，且其导数为：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

即　因变量对自变量求导，等于因变量对中间变量求导，乘以中间变量对自变量求导.（链式法则）

y—u—x

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{\cancel{du}}\cdot\frac{\cancel{du}}{dx}$$

证 由$y=f(u)$在点u_0可导得

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)$$

说过

$y - u - v - x$

故 $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)+\alpha \quad (\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha=0)$

则 $\Delta y=f'(u_0)\Delta u+\alpha\Delta u$, 于是 ,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]$$

$\varphi'(x_0)$

$$=f'(u_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

复合函数的求导公式可以推广到有限次复合的情形.

设 $y=f(u),\ u=\varphi(v),\ v=\psi(x)$,

则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$的导数为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}$.

例 9（1995-2） 设 $y=\cos(x^2)\sin^2\frac{1}{x}$，则 $y'=$__________.

解： $y'=[\cos(x^2)]'\sin^2\frac{1}{x}+\cos(x^2)[\sin^2\frac{1}{x}]'$

sin

$=-\sin(x^2)(x^2)'\sin^2\frac{1}{x}+\cos(x^2)2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}(\frac{1}{x})'$

$\sin(x^2)$

$=-2x\sin(x^2)\sin^2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\cos(x^2)\sin\frac{2}{x}$

例 10、 设函数 $f(x)$ 可导，试证

小技巧 $f(-x)=-f(x)$

(1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数；

$-f'(-x)=-f'(x)$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数；

(3) 若 $f(x)$ 为周期函数，则 $f'(x)$ 也为周期函数. $f'(-x)=f'(x)$

特别： 若 $f(x)$ 为偶函数且 $f'(0)$ 存在，则 $f'(0)=0$

$f(x)=x+\sin x$

设 $f(x)$ 以 T 为周期且 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0+T)=f'(x_0)$

$f'(x)=1+\cos x$

注： $f(x)$ 为偶函数， $x=-t$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{f(-t)-f(0)}{-t}=-\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=-f'(0)$$

$T=2\pi$

$f'(0)=0$

例 11(2017-1)已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0)=$ $\underline{\quad 0 \quad}$.

$f(x)$ 偶 $\Rightarrow f'(x)$ 奇 $\Rightarrow f''(x)$ 偶 $\Rightarrow f'''(x)$ 奇

分析：实际上 $f^{(3)}(x)$ 为奇函数，所以 $f^{(3)}(0)=0$

$f''(0)=a_2\cdot 2!=-2$

注：$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$，

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$f^{(3)}(0)=a_3 3!=0.$$

$f^{(4)}(0)=a_4\cdot 4!=24$

(3)、隐函数的导数

由方程$F(x,y)=0$所确定的函数 $y=y(x)$称为隐函数.

$y=f(x)$形式称为显函数.

$F(x,y)=0 \longrightarrow y=f(x)$ 隐函数的显化

问题：隐函数不易显化或不能显化如何求导?

隐函数求导法则：

用复合函数求导法则直接对方程两边求导解出y'.

例 12(1993-3)函数 $y=y(x)$ 是由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ________.

解：方程两边对x求导

$$\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)\cos(x^2+y^2)+e^x-y^2-2xy\frac{dy}{dx}=0$$

解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-e^x-2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}$$

例13、求由方程 $xy-e^x+e^y=0$ 所确定的隐函数y的导数 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解　方程两边对x求导,

$$y+x\frac{dy}{dx}-e^x+e^y\frac{dy}{dx}=0,$$

由原方程知 $x=0,y=0,$

所以 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1.$

(4)、反函数的导数

如果函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间 D_y 内单调、可导且 $\varphi'(y)\neq 0$，那末它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间 D_x 内也可导，且有

$$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{dy}{dx} = f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

$y=f(x)$

$\frac{dx}{dy}$

即 反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

证 任取$x\in D_x$，给x以增量Δx $(\Delta x\neq 0, x+\Delta x\in D_x)$

由$y=f(x)$的单调性可知 $\Delta y\neq 0$,

于是有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$,

因 $f(x)$连续，所以$\Delta y\to 0(\Delta x\to 0)$,

又知$\varphi'(y)\neq 0$

因此 $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

即 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

例14 求函数 $y = \underline{\arcsin x}^{f(x)}$ 的导数.

解 因 $x = \sin y$ $\varphi(y)$ 在 $D_y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内单调、可导，

且 $(\sin y)' = \cos y > 0$, 所以在 $D_x \in (-1,1)$ 内有

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$y = f(x)$

即

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得 $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

(5)、参数方程确定函数的导数(数学一、二要求)

由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数，其中

3步 二阶导数

$x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 都有二阶导数且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad \frac{d^2y}{d^2x}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]}{dt}\,\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

例 15(2020-1)设 $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}) \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$ ________.

解:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}}{\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}}=\frac{1}{t}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\frac{1}{t}}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{t^2}\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}=-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}$$

(6)、对数求导法

适用范围：

多个函数的乘、除和幂指函数$u(x)^{v(x)}$的情形.

方法：

先在方程两边(或函数)取对数，然后利用隐函数的求导方法求出导数.

例 16(2005-2) 设 $y=(1+\sin x)^{x}$，则 $dy\big|_{x=\pi}=$ ______.

$\{[f(x)]^{g(x)}\}'$

$g(x)[f(x)]^{g(x)-1}$

x

【详解】 两边取对数，$\ln y = x\ln(1+\sin x)$，两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y' = \ln(1+\sin x) + \frac{x\cos x}{1+\sin x},$$

于是 $y'=(1+\sin x)^{x}\cdot[\ln(1+\sin x)+x\cdot\dfrac{\cos x}{1+\sin x}]$，故 $dy\big|_{x=\pi}=y'(\pi)dx=-\pi dx.$

【另解】 $y=(1+\sin x)^{x}=e^{x\ln(1+\sin x)}$，于是

$$y' = e^{x\ln(1+\sin x)}\cdot[\ln(1+\sin x)+x\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x}],$$

从而 $dy\big|_{x=\pi}=y'(\pi)dx=-\pi dx.$

例17 设 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$，求$y'$.

解 等式两边取对数得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)]$$

上式两边对 x求导得

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}[\frac{1}{x-1}(x-1)'+\frac{1}{x-2}(x-2)'-\frac{1}{x-3}(x-3)'-\frac{1}{x-4}(x-4)']$$

$$y'=\frac{y}{2}[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}]$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\cdot(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4})$$

(7)、微分的求法

$$dy = f'(x)dx$$

求法：计算函数的导数，乘以自变量的微分.

1)基本初等函数的微分公式

$$d(c) = 0 \qquad d(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx \qquad d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$d(\tan x) = \sec^2 x dx \qquad d(\cot x) = -\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x) = \sec x \tan x dx \qquad d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$$

$$d(a^x)=a^x\ln a\,dx \qquad d(e^x)=e^x dx$$

$$d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx \qquad d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$$

$$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx \qquad d(\operatorname{arccot} x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$$

2) 函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u\pm v)=du\pm dv \qquad d(Cu)=Cdu$$

$$d(uv)=vdu+udv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$$

三、高阶导数

1、高阶导数的概念

如果函数$f(x)$的导数$f'(x)$在点x处可导,即

$$(f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

存在,则称$(f'(x))'$为函数$f(x)$在点x处的二阶导数.

记作 $f''(x), y'', \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x),\ y''',\ \dfrac{d^3y}{dx^3}.$

三阶导数的导数称为四阶导数, $f^{(4)}(x),\ y^{(4)},\ \dfrac{d^4y}{dx^4}.$

一般地, 函数$f(x)$的$n-1$阶导数的导数称为

函数$f(x)$的n阶导数,记作

$$f^{(n)}(x),\ y^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n}\text{或}\frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数.

相应地, $f(x)$称为零阶导数; $f'(x)$称为一阶导数.

$f(x)$的各阶导数在$x=x_0$处的导函数值分别记为:

$$f'(x_0), f''(x_0), \cdots, f^{(n)}(x_0),\ \text{或}\ y'|_{x=x_0}, y'|_{x=x_0}, \cdots, y^{(n)}|_{x=x_0}.$$

注: 函数$f(x)$在x处n阶可导, 则在x的某邻域内$f(x)$具有一切低于n阶的导数

x_0 x_0

2.常用的高阶导数公式

u,v到n阶都存在的公式

设函数 $u(x),v(x)$ 在 x 处有 n 阶导数，则

$$(u\pm v)^{(n)}=(u)^{(n)}\pm(v)^{(n)},\quad (uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(u)^{(k)}(v)^{(n-k)}$$

$(u+v)^n$

(1) $(x^n)^{(n)}=n!$　　$(e^x)^{(n)}=e^x$

(2) $(e^{ax+b})^{(n)}=a^ne^{ax+b},(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$

$(\sin x)^{(n)}$

(3) $[\sin(ax+b)]^{(n)}=a^n\sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$　　$=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$

$[\cos(ax+b)]^{(n)}=a^n\cos(ax+b+\frac{n\pi}{2})$

(4) $\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$　　$\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)}$

(5) $[\ln(ax+b)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$　　$\dfrac{1}{(ax+b)^n}$

例18 设 $y=\sin x$, 求 $y^{(n)}$.

解

$$y'=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$y''=-\sin x=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$y'''=-\cos x=\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$y^{(4)}=\sin x=\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$y^{(5)}=\cos x=\sin\left(5\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$\cdots\quad\cdots$$

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

即 $$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

同理可得 $$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$\boxed{规律}$

用数学归纳法证

$$(\cos^2 x)^{(n)}=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{(n)}$$

$$(\sin 3x)^{(n)}=3^n\sin\left(3x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

例 19、设 $y = x^2 \cos x$，求 $y^{(n)}$

u v

解、用莱布尼兹公式 $k=0,1,2$

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)} (\cos x)^{(n-k)}$$

$$= C_n^0 x^2 (\cos x)^{(n)} + C_n^1 2x(\cos x)^{(n-1)} + C_n^2 2(\cos x)^{(n-2)}$$

$$= x^2 \cos(x + \frac{n}{2}\pi) + 2nx\cos(x + \frac{n-1}{2}\pi) + n(n-1)\cos(x + \frac{n-2}{2}\pi)$$

常考题型与典型例题

1、导数的定义.

2、各种形式的求导.

3、高阶导数.

4、导数的应用. —几何意义

一、导数的定义-命题形式

1、分段函数在分界点处的导数.

2、已知 $f'(x_0)$ 存在，求极限.

3、已知极限求 $\boxed{f'(x_0)}$.

4、抽象函数 $f(x)$ 可导性未知，求 $f'(x_0)$ 或 $f'(x)$.

a^n-b^n

例 20、设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=1$，求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^{2021}-1}$

【分析】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^{2021}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x^{2020}+x^{2019}+\cdots+x+1)}$

$$=\frac{f'(1)}{2021}=\frac{1}{2021}$$

例 21(1994-3)已知 $f'(x_0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{-x}}$

$$=-\frac{1}{f'(x_0)}=1$$

注： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0)-[f(x_0-x)-f(x_0)]}{x}$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0)}{-2x}+\lim_{x\to 0}\frac{[f(x_0-x)-f(x_0)]}{-x}=-f'(x_0)=1$$

$-2f'(x_0)+f'(x_0)$

例 22(2011-23) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A) $-2f'(0)$.　(B) $-f'(0)$.　(C) $f'(0)$.　(D) 0.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3)-f(0)}{x^3}$，

0^+

拼凑

$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$.

答案：B

例 23(2006-34) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则

已知极限

求导数

（A） $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)\exists$　　（B） $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)\exists$

（C） $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)\exists$　　（D） $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)\exists$

分母 $\to 0 \Rightarrow$ 分子 $\to 0$

分析： 1、 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}f(h^2)=0 \Rightarrow f(0)=0$

$f'(0)=1$ ×

$x=h^2$

2、 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1 \Rightarrow f'_+(0)=1$

答案：C

例 24(2013-1) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n[f(\frac{1}{n})-1]=$____.

$x=0 \quad y=1$

$f(\frac{1}{n})-f(0)$

【详解】 在方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 中，令 $x=0$，得 $y=1$，等式两端对 x 求导得：

$$y'-1=e^{x(1-y)}(1-y-xy'),$$

$n\to\infty \quad \frac{1}{n} \to f(0)$

将 $x=0, y=1$ 代入上式，得 $y'(0)=1$，

定义

$$\lim_{n\to\infty} n[f(\frac{1}{n})-1]=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}=f'(0)=1.$$

例 25(2018-123) 下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是

（A） $f(x)=|x|\sin|x|$ （B） $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

（C） $f(x)=\cos|x|$ （D） $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

x^2

分析： A、 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|x|\sin|x|}{x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|x|^2}{x}=0$

$f(x)-f(0)$

B、 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|x|^{\frac{3}{2}}}{x}=0$

$-\frac{1}{2}|x|^2$

C、 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos|x|-1}{x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|x|^2}{x}=0$

D、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$

答案：D

例 26(1989-3) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是

（A）$\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f(a+\frac{1}{h})-f(a)\right]$ 存在　　（B）$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f(a+\frac{1}{n})-f(a)\right]$ 存在

$=f(a)$

（C）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在　　（D）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

$\exists$

分析：D、$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h} \overset{t=-h}{=} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}=f'(a)$

C、$f(x)=\begin{cases}1, x=a\\ 0, x\neq a\end{cases}$，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=0$　　$f(x)$ 在 $x=a$ 处不连续

A、$\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f(a+\frac{1}{h})-f(a)\right] \overset{t=\frac{1}{h}}{=} \lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}=f'_+(a)$

B、$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f(a+\frac{1}{n})-f(a)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[f(a+\frac{1}{n})-f(a)\right]}{\frac{1}{n}}$　$\exists$

答案：D

二、复合函数、隐函数、参数方程求导

例 27(1993-3) 设 $y=\sin[f(x^2)]$，其中 f 具有二阶导数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解： $\dfrac{dy}{dx}=2x\cos[f(x^2)]f'(x^2)$

显函数

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\cos[f(x^2)]f'(x^2)-2x\sin[f(x^2)][f'(x^2)]^2\cdot 2x+2x\cos[f(x^2)]f''(x^2)\cdot 2x$$

$$=2f'(x^2)\cos[f(x^2)]+4x^2\{f''(x^2)\cos[f(x^2)]-[f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\}$$

例 28(2012-2) 设 $y=y(x)$是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{d^2y}{d^2x}\Big|_{x=0}=$ ________.

$x=0$, $y=0$　$1-y=e^y$ 隐函数

$y = x$、y

解： 将 $x=0$ 代入方程 $x^2-y+1=e^y$ 得 $y=0$.

在方程 $x^2-y+1=e^y$ 两边同时对 x 求导得 $2x-y'=e^y\cdot y'$,

代入 $x=0$, $y=0$ 得 $y'(0)=0$.

再在方程 $2x-y'=e^y\cdot y'$ 两边对 x 求导得 $2-y''=e^y\cdot(y')^2+e^y\cdot y''$,

代入 $x=0, y=0$, $y'(0)=0$ 得 $y''(0)=1$.

例 29(2013-1) 设 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t\sin t + \cos t \end{cases}$（$t$ 为参数），则 $\left.\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} =$ ________.

参数方程

?

解： 可计算 $\dfrac{dx}{dt} = \cos t, \dfrac{dy}{dt} = t\cos t$，则 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = t$.

由 $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\dfrac{dt}{dx}$ 有

$$\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left.\frac{dt}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left.\frac{1}{\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

三、 高阶导数

方法：1、数学归纳法

2、重要函数的高阶导数公式

3、莱布尼兹公式

4、幂级数展开（泰勒公式）

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \Rightarrow f^{(n)}(x_0)=a_n n!$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

例 30(2007-23)设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$ ________.

分析： $$y^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n 2^n n!}{(2x+3)^{n+1}},$$

故 $$y^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}.$$

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

例 31(2015-2) 函数 $f(x)=x^2\cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$____.

解、 用莱布尼兹公式

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^2)^{(k)}(2^x)^{(n-k)}$$

$$=C_n^0x^2(2^x)^{(n)}+C_n^1 2x(2^x)^{(n-1)}+C_n^2 2(2^x)^{(n-2)}$$

$$f^{(n)}(0)=C_n^2 2(2^x)^{(n-2)}\Big|_{x=0}=n(n-1)2^x(\ln 2)^{n-2}\Big|_{x=0}=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}.$$

注： 还可考虑用泰勒展开式

四、导数的应用

1、导数的几何意义

例 32(2011-3)设曲线 $\tan(x+y+\frac{\pi}{4})=e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为____________.

【详解】 方程两边对 x 求导得

$$\sec^2(x+y+\frac{\pi}{4})(1+y')=e^y y'$$

令 $x=y=0$ 得 $y'(0)=-2$,

则曲线在点 $(0,0)$ 处的切线方程为: $y=-2x$.

例 33(2013-2)曲线$\begin{cases} x=\arctan t, \\ y=\ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为________．$=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$

【详解】 将 $t=1$ 代入$\begin{cases} x=\arctan t, \\ y=\ln\sqrt{1+t^2}, \end{cases}$ 得 $x=\frac{\pi}{4}$， $y=\frac{1}{2}\ln 2$，

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=1}=\left.\frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}\right|_{t=1}=\left.t\right|_{t=1}=1,$$

所求法线方程为 $y-\frac{1}{2}\ln 2=-(x-\frac{\pi}{4})$，即 $x+y=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$．

例 34(1997-1) 对数螺线 $\rho = e^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta) = \left(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为 ________ .

极坐标 ⟹ 参数方程

【详解】 对数螺线的参数方程可写为 $\begin{cases} x = e^{\theta}\cos\theta \\ y = e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$ ，$\theta = \frac{\pi}{2}$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 时，$x = 0,\quad y = e^{\frac{\pi}{2}}$，

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{\cancel{e^{\theta}}(\sin\theta+\cos\theta)}{\cancel{e^{\theta}}(\cos\theta-\sin\theta)}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1,$$

所求切线的直角坐标方程为 $x + y = e^{\frac{\pi}{2}}$.

例 35. 设 $f(x)$ 是可导的偶函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足

$$f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)=2x^2+o(x^2),$$

求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程

$f(-1)=f(1)$

$f'(-1)=-f'(1)$

分析： 1、由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)-2x^2}{x^2}=0$，得

法0

分①→0 ⇒ 分②→0

$$f(1)-3f(1)=0\Rightarrow f(1)=0$$

一阶

2、$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}-\dfrac{3f(1+\sin x^2)}{\sin x^2}\cdot\dfrac{\sin x^2}{x^2}-2\right)=0$

有 $f'(1)-3f'(1)-2=0\Rightarrow f'(1)=-1$

3. $f(-1)=f(1)=0,\ f'(-1)=-f'(1)=1$，切线方程为 $y=x+1$

2、相关变化率

设 $x = x(t), y = y(t)$ 都是可导函数，而变量 x 与 y 之间存在某种关系，因此变化率 $\frac{dx}{dt}$ 与 $\frac{dy}{dt}$ 也存在一定关系，这两个相互依赖的变化率称为相关变化率.

例 36(2016-2) 设已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与 P 间的距离为 l．若点 P 横坐标时间的变化率为常数 v_0，则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时，l 对时间的变化率是______.

【详解】 设动点 $P(x,x^3)$，则 $l=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^6}$，

且 $\dfrac{dx}{dt}=v_0$，于是

$$\left.\frac{dl}{dt}\right|_{(x,y)=(1,1)}=\left.\frac{2x+6x^5}{2\sqrt{x^2+x^6}}\boxed{\frac{dx}{dt}}\right|_{x=1}=2\sqrt{2}v_0.$$