2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2020年11月

第三章 微分中值定理与导数的应用

1° $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续 2° $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导 $\Rightarrow \exists\, \xi \in (0,\frac{\pi}{2})$ 使 $F'(\xi)=0$

$g(x)$ $F(x)$ $F(x) = f(x)\sin x$ 3° $F(0)=F(\frac{\pi}{2})=0$

$f'(\xi)\sin\xi + f(\xi)\cos\xi = 0$

$[0,\frac{\pi}{2}]$ $f(\frac{\pi}{2})=0 \Longleftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\cot\xi$

分(子)$\to 0 \Rightarrow$ 分母$\to 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = 1 \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = 0$$

考试要点

一、函数及曲线性态的研究

1、求曲线的切线及法线方程 (讲)
2、判断函数的单调性、求函数的极值和最值
3、研究曲线的凹凸性、求曲线的拐点
4、求曲线的渐进线方程
$\boxed{核}$
5、~~函数作图~~ (除考)
6、曲线的曲率(数一、二) (仅)
7、经济应用(边际与弹性) (数三)

二、方程根的确定

三、中值定理的证明

四、不等式的证明

考试要求

08

084

1.理解并会用罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理和泰勒(Taylor)定理，了解并会用柯西(Cauchy)中值定理．

2.理解(了解)函数的极值概念，掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法，掌握函数最大值和最小值的求法及其应用．

3.会用导数判断函数图形的凹凸性(注：在区间(a,b)内，设函数具有二阶导数．当$f''(x)>0$时，$f(x)$的图形是凹的；当$f''(x)<0$时，$f(x)$的图形是凸的)，会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线，会描绘函数的图形．

13

4.了解曲率、曲率圆与曲率半径的概念,会计算曲率和曲率半径(数一、二).

5.了解导数的经济意义(含边际和弹性-数学三).

考试内容概要

一、微分中值定理

1、费马引理

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)=(x_0+\delta,\ x_0-\delta)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导，如果对任意的 $x\in U(x_0)$，有 $f(x)\le f(x_0)$ (或 $f(x)\ge f(x_0)$)，那么 $f'(x_0)=0$.

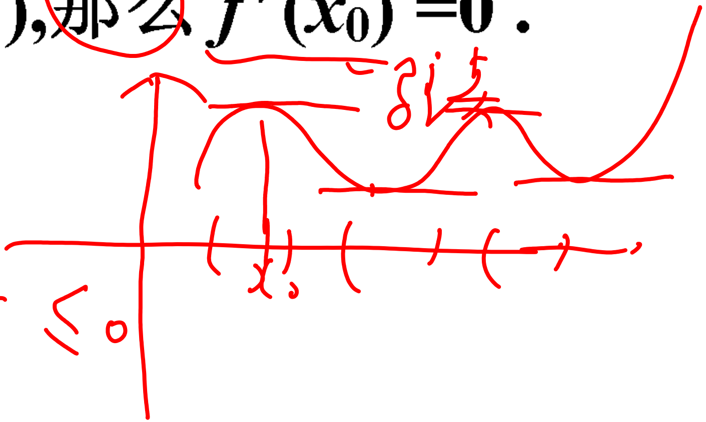
$x^n+y^n=z^n$

注： 取得极值的必要条件

$$0\le f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$$

x_0^+

x_0^-



2、罗尔定理

如果函数$f(x)$满足条件：

(1)在闭区间$[a,b]$上连续；

(2)在开区间(a,b)内可导；

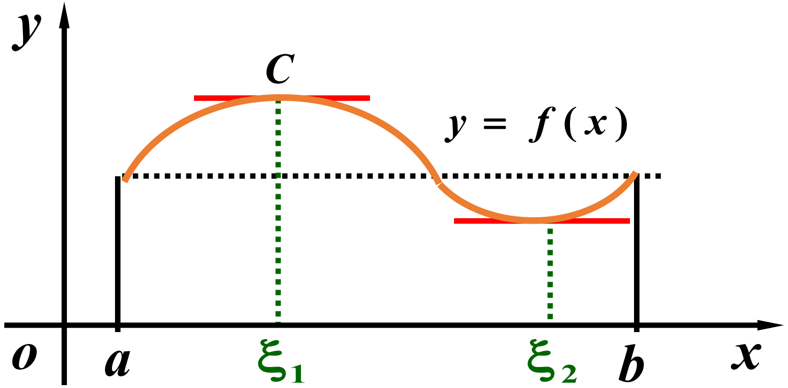
(3)在区间端点函数值相等,即$f(a)=f(b)$,

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得

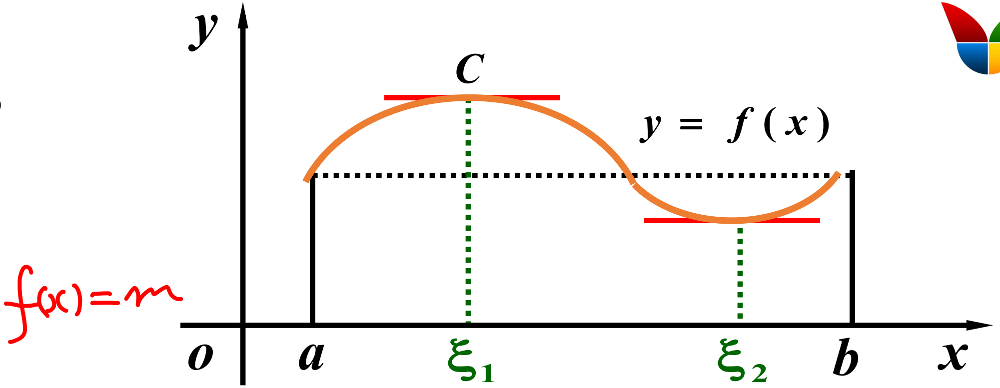
$$f'(\xi)=0.$$

几何解释：

在曲线弧 AB 上至少有一点 C,在该点处的切线是水平的 .



证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在$[a,b]$上必有最大值 M 和最小值 m.



(1) 若 $M = m$.

则 $f(x) = M$.

由此得 $f'(x) = 0$.　$\forall \xi \in (a,b)$，　都有 $f'(\xi) = 0$.

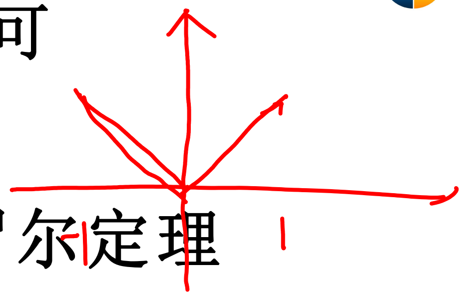
(2) 若 $M \neq m$.　因 $f(a) = f(b)$，

因此最值不可能同时在端点取得.　不妨设 $M \neq f(a)$，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f(\xi) = M$. 有 $f'(\xi) = 0$.

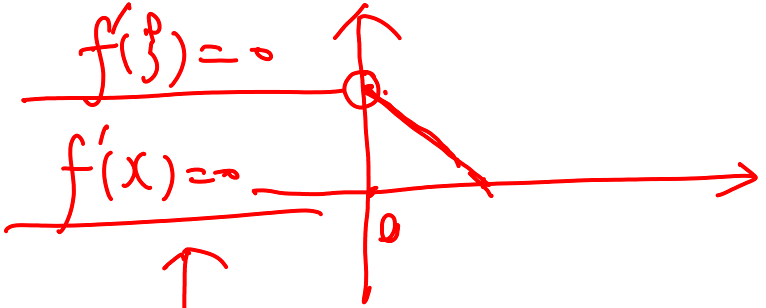
注意： 若罗尔定理的三个条件缺一不可

$$y=|x|,\ x\in[-1,1]$$

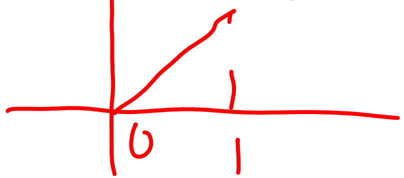


在 $[-1,1]$ 上除 $f'(0)$ 不存在外,满足罗尔定理的一切条件,但在区间 $(-1,1)$ 内找不到一点能使 $f'(x)=0$.

$$y=\begin{cases}1-x, & x\in(0,1],\\ 0, & x=0.\end{cases}$$



$$y=x,\ x\in[0,1].$$



例1 设$f(x)$在闭区间$[0,a]$上连续，在开区间$(0,a)$上可导，且$f(a)=0$，证明必有一点$\xi\in(0,a)$，使得

$$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

分析 令$\xi=x$，则欲证结论变为$f(x)+xf'(x)=0$，

证明 令$F(x)=xf(x)$，则 $F(x)$在$[0,a]$上连续，

在$(0,a)$内可导， 且$F(0)=F(a)=0$，

由罗尔定理知： 存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$F'(\xi)=[f(x)+xf'(x)]|_{x=\xi}=0,$$

即$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$

$xf(x)$

$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=-\int\frac{1}{x}dx$

$\ln f(x)=-\ln x+\ln C$

$\ln xf(x)=\ln C$

$(xf(x))'=C'=0$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^2}=3$

$\lim f(x)=\lim\left[\frac{f(x)}{(x-a)^2}\cdot(x-a)^2\right]=0$

$f(a)=0$

3、拉格朗日中值定理

如果函数 $f(x)$满足条件：

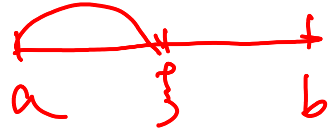
(1)在闭区间 $[a,b]$上连续；

(2)在开区间 (a,b)内可导；

$f(a)=f(b)$

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



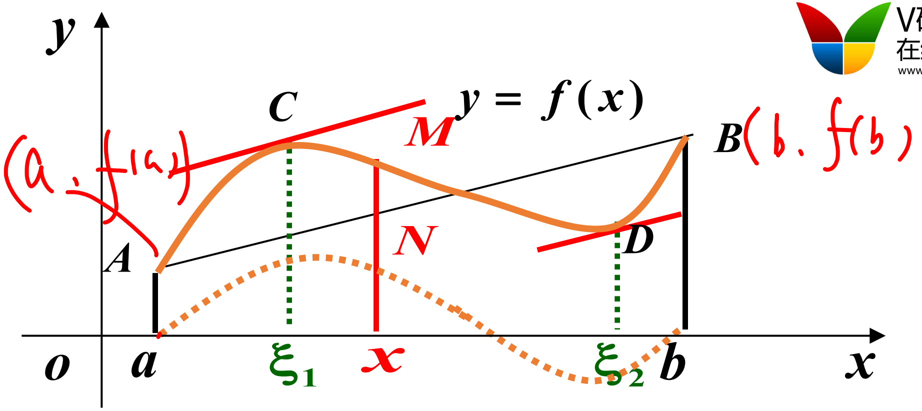
或 $$\boxed{f(b)-f(a)}=f'(\xi)(b-a).$$

注意:拉格朗日中值定理也可等价表示为:存在θ(0 <θ<1),使得

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a).$$

几何解释：

在曲线弧 AB 上至少有一点 C,在该点处的切线平行于两端点连线 AB.



分析：

条件中与罗尔定理相差 $f(a)=f(b)$.

AB方程为: $y=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

曲线 $f(x)$ 减去线段 AB,

所得曲线a,b两端点的函数值相等.

证1

作辅助函数 $F(x)=f(x)-[f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)].$

割线

则 $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a},$

知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且

$$F(a)=0=F(b).$$

由罗尔定理知 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得

$$F'(\xi)=0.$$

因此 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

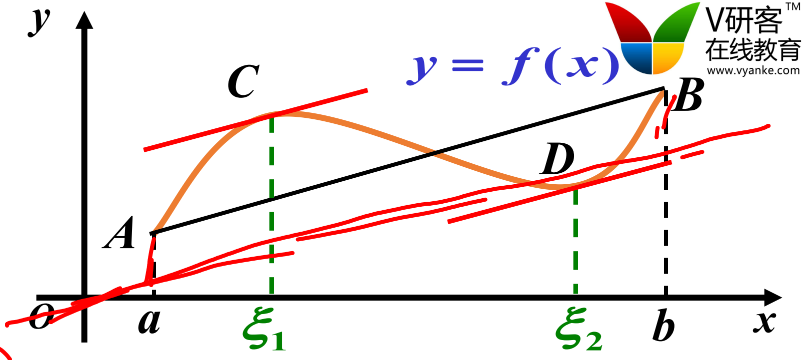
或 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$

拉格朗日中值公式

注意: 拉格朗日公式精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数之间的关系.

几何解释:

在曲线弧AB上至少有一点C,在该点处的切线平行于弦AB.



证2 作辅助函数

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x,$$

则知$g(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a, b)内可导, 且

$$g(a) = \frac{1}{b - a}[bf(a) - af(b)] = g(b)$$

故在开区间(a, b)内至少存在一点ξ,使得

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

由此得 $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi).$

也可如下作辅助函数：

将$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

变形$[f(b)-f(a)]-f'(\xi)(b-a)=0$，即$F'(\xi)=0.$

其中：$F(x)=[f(b)-f(a)]x-f(x)(b-a).$

$\left.\{[f(b)-f(a)]x-f(x)(b-a)\}'\right|_{x=\xi}=0$

推论1 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内任意一点的导数恒为零，则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是一个常数.

$f(x_1)=f(x_2)=C$

$\forall x_1,x_2\in(a,b)$

证 对任意 $x_1<x_2$，且 $(x_1,x_2\in(a,b))$，有

$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，

因此存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得

$$f(x_2)=f(x_1)+f'(\xi)(x_2-x_1)=f(x_1)$$

即 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内任意两点的函数值都相同，

所以 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是一个常数 .

$f(x)-g(x)=C$

推论2 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内任意一点的导数都相等，则这两个函数在区间 (a,b) 内至多相差一个常数 .

例2 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导，证明必有一点$\xi\in(a,b)$使得

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi).$$

$$[xf(x)]'\Big|_{x=\xi}$$

分析 令$\xi=x$，则欲证结论变为，

$$f(x)+xf'(x)=\frac{bf(b)-af(a)}{b-a},$$

证明 令$F(x)=xf(x)$，则$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，由拉格朗日中值定理

存在$\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}$，

即$f(\xi)+\xi f'(\xi)=\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}$.

注 令 $\xi = x$,则欲证结论变为，

$$f(x)+xf'(x)-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=0,$$

作辅助函数 $F(x)=xf(x)-\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}x,$

则 $F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且

$$F(a)=af(a)-\frac{[bf(a)-af(b)]}{b-a}\cdot a=\frac{ab[f(a)-f(b)]}{b-a},$$

$$F(b)=bf(b)-\frac{[bf(a)-af(b)]}{b-a}\cdot b=\frac{ab[f(a)-f(b)]}{b-a}=F(a),$$

由罗尔中值定理 存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,

$$即\ \frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi).$$

4、柯西中值定理

如果函数 $f(x)$与$g(x)$满足条件:

(1)在闭区间 $[a,b]$上连续;

(2)在开区间 (a,b)内可导;

(3)对$\forall x\in(a,b), g'(x)\neq 0$;

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

$f(b)-f(a)=f'(\xi_1)(\cancel{b-a})$

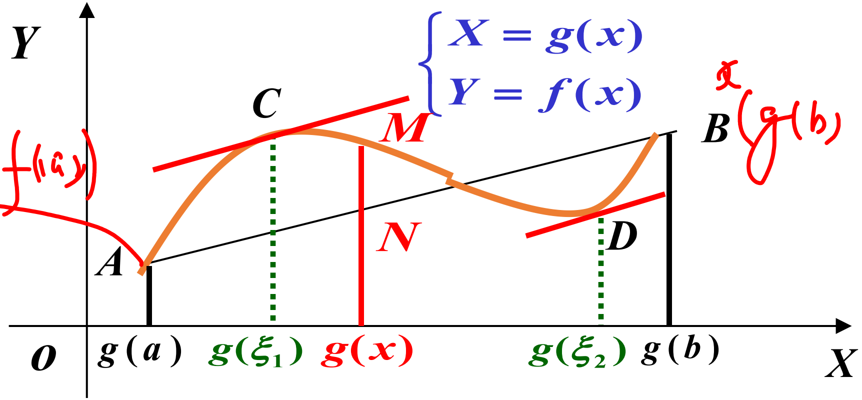
$g(b)-g(a)=g'(\xi_2)(\cancel{b-a})$

$\boxed{g(x)=x}$

几何解释:

在曲线弧 AB 上至少有一点 $C(g(\xi),f(\xi))$, 在该点处的切线平行于 AB.

$(g(a), f(a))$



x $(g(b)\ f(b))$

证 作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

$\varphi(a)=\varphi(b)=0$

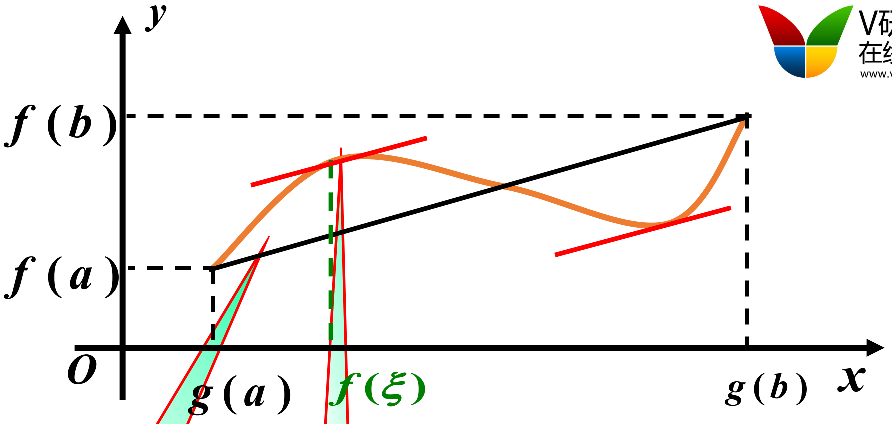
$\varphi(x)$ 满足罗尔定理的条件,

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $\varphi'(\xi)=0$.

即 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(\xi)=0$, $\Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

柯西定理的几何意义

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$$



注意 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$

柯西中值定理 若函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 满足：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

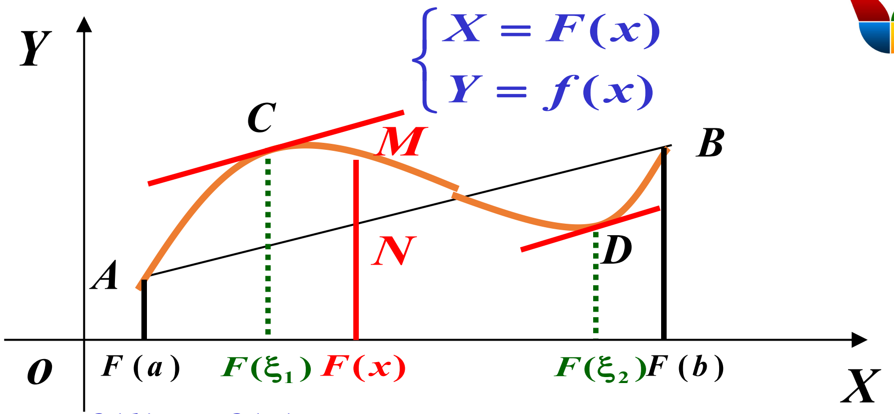
(2) 在开区间 (a,b) 内可导，且 $g'(x) \neq 0$，

则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

弦的斜率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 切线斜率

几何解释:

在曲线弧AB上至少有一点$C(F(\xi), f(\xi))$,在该点处的切线平行于弦AB.



证2 作辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} F(x).$$

则知$\varphi(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a, b)内可导,且

$$\varphi(a) = \frac{f(a)F(b) - f(b)F(a)}{F(b) - F(a)} = \varphi(b)$$

则在(a,b)内至少存在一点 ξ,使得 $\varphi'(\xi) = 0$.

即 $f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} \cdot F'(\xi) = 0,$

所以 $\dfrac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$

也可如下作辅助函数：

将 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ 变形为：

$$[f(b)-f(a)]F'(\xi)-[F(b)-F(a)]f'(\xi)=0,$$

即： $\varphi(x)=[f(b)-f(a)]F(x)-[F(b)-F(a)]f(x)$

例3 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，

证明：至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使

$$f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)].$$

分析： 令 $\xi = x$，则欲证结论变为，

$$2x[f(1) - f(0)] = \frac{f'(x)}{2x} \Rightarrow \frac{f(1) - f(0)}{1^2 - 0^2} = \frac{f'(x)}{2x}$$

$(x^2)'$

证 设 $g(x) = x^2$，

则 $f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，

由柯西中值定理，在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使

$$\frac{f(1) - f(0)}{1^2 - 0^2} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

5、(泰勒中值定理-带有拉格朗日型余项) 如果函数 $f(x)$在含有 x_0 的某个开区间(a, b)内具有直到$(n+1)$阶的导数，则对任一 $x \in (a, b)$，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，这里$\xi$是 x_0 与 x 之间的某个值. 此公式也称为带有拉格朗日型余项的n阶泰勒(Taylor)公式.

$\xi(x)$

5、(泰勒中值定理-带有皮亚诺型余项) 如果函数 $f(x)$在 x_0 处具有直到 n 阶导数，则有

跨阶导数　$f(x_0)$ — $f''(x_0)$　f'　f''

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$，此公式也称为带有皮亚诺型余项的n阶泰勒(Taylor)公式.

在需要用到泰勒公式时，必须要搞清楚三点：

1．展开的基点； x_0 — 阶数

2．展开的阶数；

3．余项的形式．

其中余项的形式，一般在求极限时用的是带皮亚诺余项的泰勒公式，在证明不等式时用的是带拉格朗日余项的泰勒公式．

而基点和阶数，要根据具体的问题来确定．

常见的泰勒公式

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3),$$

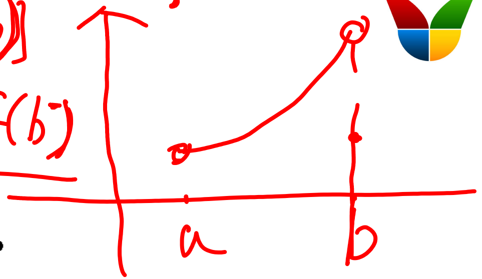
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

二、导数的应用

1. 判定函数单调性的充分条件

$x\in(a,b]$

$f(x)<f(b)$



设函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导.

(1) 如果在(a,b)内 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加；

(2) 如果在(a,b)内 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

注意: 1°如果把这个判定法中的闭区间换成其他各种区间(包括无穷区间)，那么结论也成立.

$[a,+\infty)$ $(a,+\infty)$ $f'(x)>0$

2°若将 $f'(x)>0$ (或 $f'(x)<0$)改为 $f'(x)\geq 0$ (或 $f'(x)\leq 0$)，且在区间内使 $f'(x)=0$ 的点只有有限个，那么函数 $y=f(x)$在$[a,b]$ 上仍旧是单调增加(或单调减少)的.

$f(x)=x^3$ $f'(x)=3x^2\geq 0$

注意: 函数的单调性是一个区间上的性质，要用导数在这一区间上的符号来判定，而不能用一点处的导数符号来判别一个区间上的单调性.

单调区间求法

导数等于零的点和不可导点，可能是单调区间的分界点.

方法: 用方程 $f'(x)=0$ 的根及 $f'(x)$ 不存在的点来划分函数 $f(x)$ 的定义区间,然后判断区间内导数的符号.

例4 确定函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间.

解 $\because D:(-\infty,+\infty)$. $f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $(x\neq 0)$

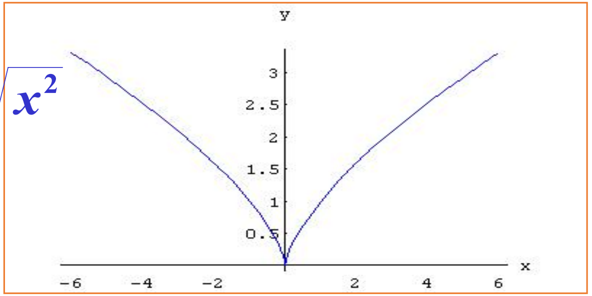
$\int_a^x f(t)\,dt$

当 $x=0$ 时,导数不存在 .

当 $x<0$ 时, $f'(x)<0$, $\therefore$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调减少;

当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, $\therefore$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加;

$y=\sqrt[3]{x^2}$



单调区间为

$(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$.

注: 区间内个别点导数为零,不影响区间的单调性.

如, $y=x^3$, $y'\big|_{x=0}=0$, 但在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加 .

2.函数的极值

定义 设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义 如果对于去心邻域$\mathring{U}(x_0)$内的任一x,有$f(x)<f(x_0)$ (或$f(x)>f(x_0)$), 那么就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值(或极小值). 函数的极大值与极小值统称为函数的极值, 使函数取得极值的点称为极值点.

y=c

取得极值的必要条件 设函数$f(x)$在x_0处可导, 且在x_0取得极值, 那么$f'(x_0)=0$.

注意: 一个函数的可能极值点就是其导数为零或导数不存在的点.

(取得极值的第一充分条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导. 极

(1) 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时, $f'(x)>0$, 且 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, $f'(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

x_0 极小

(2) 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时, $f'(x)<0$, 且 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

(3) 若 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, $f'(x)$ 的符号保持不变, 则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

(取得极值的第二充分条件) 设函数 $f(x)$在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$，那么

(1) 若 $f''(x_0)<0$，函数 $f(x)$在 x_0 处取得极大值;

(2) 若 $f''(x_0)>0$，函数 $f(x)$在 x_0 处取得极小值.

(3) 若 $f''(x_0)=0$，不能判定函数 $f(x)$在 x_0 处是否取得极值.

判别法 $\begin{cases}\text{第一充分条件;}\\ \text{第二充分条件;}\end{cases}$ (注意使用条件)

求极值的步骤:

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 求驻点和不可导点;

(3) 检查 $f'(x)$ 在临界点左右的正负号， 充一

或计算 $f''(x)$(存在的话) 在驻点处的函数值, 充二

判断极值点；

(4) 求极值.

例5 求出函数 $f(x)=x^3+3x^2-24x-20$ 的极值.

定义域 $(-\infty,+\infty)$

解 $f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-4$， $x_2=2$.

列表如下：

x	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

故极大值 $f(-4)=60$， 故极小值 $f(2)=-48$.

3.函数的最大最小值问题

(1) 设 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续,则其最大最小值的求法是:先求函数在(a,b)内的驻点和导数不存在的点,然后比较函数在驻点、导数不存在的点和区间端点处函数值的大小,从而可得最大最小值以及最值点.

(2) 设$f(x)$在开区间(a, b)上连续,则其最大最小值的求法:如果 $f(x)$在开区间(a, b)上有唯一的驻点且取极大(小)值,则此极大(小)值就是函数的最大(最小)值.

(3) 实际应用问题一般由问题的性质可作出判定.

例6 求函数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$ 的在$[-3,4]$上的最大值与最小值.

解 $\because f'(x) = 6(x+2)(x-1)$

解方程 $f'(x) = 0$,得 $x_1 = -2,\ x_2 = 1.$

计算 $f(-3) = 23$; $f(-2) = 34$;

$f(1) = 7$; $f(4) = 142$;

比较得: 最大值 $f(4) = 142$,

最小值 $f(1) = 7.$

4. 曲线的凹凸性

定义 设 $f(x)$在区间 I 上连续，如果对 I 上任意两点 x_1, x_2, $(x_1 \neq x_2)$恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，那么称 $f(x)$在 I 上的图形是凹的(或凹弧);

如果恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,那么称 $f(x)$在 I 上的图形是凸的(或凸弧).

注意:(1)凹曲线弧上过任意一点 $x_0 \in (a, b)$ 的切线总在曲线的下方,即 $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$;

(2)凸曲线弧上过任意一点 $x_0 \in (a, b)$的切线总在曲线的上方,即 $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

(判别凹凸性充分条件)设 $f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内具有一阶和二阶导数，那么

(1) 若在(a, b)内 $f''(x) > 0$，则 $f(x)$在$[a, b]$上的图形是凹的；

(2) 若在(a, b)内 $f''(x) < 0$，则 $f(x)$在$[a, b]$上的图形是凸的.

注意:1°如果把这个判定法中的闭区间换成其他各种区间(包括无穷区间)，那么结论也成立.

2°若将$f''(x)>0$ (或$f''(x)<0$)改为$f''(x)\geq 0$ (或$f''(x) \leq 0$)且在区间内使$f''(x)= 0$ 的点只有有限个,那么曲线$y= f(x)$在$[a, b]$ 上仍旧是凹(凸)的.

5.曲线的拐点

定义 连续曲线上凹弧与凸弧的分界点称为曲线的拐点.

即设 $y=f(x)$在区间 I 上连续,x_0 是 I 的内点,如果曲线 $y=f(x)$ 在经过点$(x_0,f(x_0))$时,曲线的凹凸性发生了改变,那么称 $(x_0,f(x_0))$为此曲线的拐点.

(取得拐点的必要条件) 设函数 $f(x)$在 x_0 处二阶可导,且$(x_0,f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$的拐点,那么 $f''(x_0)=0$.

注: 若$(x_0,f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$的拐点,那么 $f''(x_0)=0$,或 $f''(x_0)$不存在.

拐点的判定

(第一充分条件) $f(x)$在x_0处连续，若$f''(x)$在x_0的左、右两侧邻近的符号相反,则$(x_0, f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点.

注意:当$f''(x)$在x_0的左、右两侧邻近的符号相同时,$(x_0, f(x_0))$不是此曲线的拐点.

(第二充分条件) 若$y=f(x)$满足$f''(x_0)=0, f'''(x_0)\neq 0$,则$(x_0, f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点.

例7 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点及凹、凸区间.

解 定义域为 $(-\infty,+\infty)$,

$$y'=12x^3-12x^2,\quad y''=36x(x-\frac{2}{3}).$$

令 $y''=0$, 得 $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}$.

所求曲线的拐点及凹凸区间列表如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	凹	拐点 $(0,1)$	凸	拐点 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$	凹

6.曲线的渐近线

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=C$ （C 为常数），则 $y=C$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条铅直渐近线.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$，而且 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$，则 $y=ax+b$ 是 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

注:1.上述确定各种渐近线的极限过程也可以是单边极限.

2.某方向上有水平渐近线，则此方向上没有斜渐近线.

例8 求曲线 $y=(x-2)^{5/3}-\frac{5}{9}x^2$ 的拐点及凹凸性.

解 定义域为 $(-\infty,+\infty)$

$$y'=\frac{5}{3}(x-2)^{2/3}-\frac{10}{9}x,\quad y''=\frac{10}{9}\cdot\frac{1-(x-2)^{1/3}}{(x-2)^{1/3}}.$$

令 $y''=0$，得 $x_1=3$，　y''不存在的点 $x_2=2.$

列表

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	不存在	$+$	0	$-$
$f(x)$		拐点 $(2,-\frac{20}{9})$		拐点 $(3,-4)$	

7、函数的作图

第一步 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域,对函数进行奇偶性、周期性、曲线与坐标轴交点等性态的讨论.

第二步 求 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 在函数定义域内的全部实根,用这些根和函数的间断点或导数不存在的点把函数的定义域划分成几个部分区间.

第三步 确定这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号,并由此确定函数这些部分区间内函数的单调性、凹向、极值点、拐点.

第四步 确定函数图形的渐近线以及其他变化趋势;

第五步 描绘 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 的根对应的曲线上的点,或补充一些点,画出函数的图形.

8.平面曲线的弧微分与曲率

弧微分

(1) 直角坐标系下的光滑曲线 $y=f(x)$,

其弧微分 $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

(2) 参数方程表示的光滑曲线 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$

其弧微分 $ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$.

(3) 极坐标系下的光滑曲线 $\rho=\rho(\theta)$,

其弧微分 $ds=\sqrt{\rho^2(\theta)+[\rho'(\theta)]^2}\,d\theta$.

曲率

(1) 定义 设M和N是曲线上不同的两点，弧$\overline{MN}$的长为Δs

当点M沿曲线到达N时,M点处的切线所转过的角为$\Delta\alpha$，则

称极限$K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$为该曲线在点$M$处的曲率.

(2) 曲率计算公式 若曲线方程为$y=f(x)$，则曲率

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

注： 曲率半径$R=\dfrac{1}{K}(K\neq 0)$.曲率中心、曲率圆

例 9(2009-2)若$f''(x)$不变号,且曲线$y=f(x)$在点(1,1)上的曲率圆为$x^2+y^2=2$，则函数$f(x)$在区间(1, 2)内

(A)有极值点,无零点.　　(B)无极值点,有零点.

(C)有极值点,有零点.　　(D)无极值点,无零点.

【分析】 由题意可知$f''(x)<0, f'(1)=-1$,

在 $[1,2]$上, $f'(x)\le f'(1)=-1<0$,

即 $f(x)$单调减少,没有极值点.

由拉格朗日中值定理 $f(2)-f(1)=f'(\xi)<-1$, $\xi\in(1,2)$，所以$f(2)<0$,

而$f(1)=1>0$，由零点定理知,在(1, 2)内 $f(x)$有零点,故应选(B).

9、导数在经济中的应用(数学三)

经济数学中的常用函数

(1) 成本函数 $C(x)$: $C(x)$=固定成本+可变成本

平均成本函数: $\bar{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}$

(2) 需求函数 $Q(p)$: 需求量为价格 p 的函数，常用线性函数为 $Q=a-bp$

(3) 供给函数 $S(p)$: 供给量为价格 p 的函数，常用线性函数为 $S=c+dp$

(4) 收益函数 $R(x)$: $R(x)=x\cdot p$， x 是产量，p 是价格

(5) 利润函数 $L(x)$: $L(x)=R(x)-C(x)$ （或$-T$，税收）

边际函数与边际分析

如果函数$f(x)$可导，导函数$f'(x)$称为边际函数.

导数值$f'(x_0)$称为$f(x)$在$x=x_0$处的边际函数值.

边际函数值$f'(x_0)$表示$f(x)$在点$x=x_0$处的变化速度

在点$x=x_0$处，x从x_0改变一个“单位”时，y的

增量Δy的准确值为：$\Delta y\Big|_{\substack{x=x_0\\ \Delta x=1}}$.

当x改变的一个“单位”很小时，

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=x_0\\ \Delta x=1}}\approx dy=f'(x)\Delta x\Big|_{\substack{x=x_0\\ \Delta x=1}}=f'(x_0).$$

经济学中常用的边际函数

(1) 边际成本MC=$C'(x)$

(2) 边际收益MR=$R'(x)$

(5) 边际利润ML=$L'(x)$

弹性函数与弹性分析

(1)设函数$f(x)$在点$x=x_0$处可导,函数的相对改变量$\dfrac{\Delta y}{y_0}$与自变量的相对改变量$\dfrac{\Delta x}{x_0}$之比$\dfrac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$,称为函数$f(x)$从$x=x_0$到$x=x_0+\Delta x$两点间的相对变化率,或称为两点间的弹性.

(2)当自变量增量趋于零时相对变化率$\dfrac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$ $= f'(x_0)\cdot\dfrac{x_0}{y_0}$

$\Delta x \to 0$

的极限,称为函数$f(x)$在$x=x_0$处的相对变化率,或称为弹性.也就是相对导数. 记为:

$$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0},\ \text{或}\ \frac{E}{Ex}f(x_0).$$

即 $\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}=\frac{E}{Ex}f(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x_0}{y_0}=f'(x_0)\cdot\frac{x_0}{y_0}.$

弹性的意义： $\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}=\frac{E}{Ex}f(x_0)$表示在点$x=x_0$处，

当x产生1%的改变时，$f(x)$近似地改变$\frac{E}{Ex}f(x_0)\%$.

（3）若$f(x)$是可导函数，则

$$\frac{Ey}{Ex}=\frac{E}{Ex}f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=y'\cdot\frac{x}{y}$$

称为$f(x)$的弹性函数.

$\frac{Ey}{Ex}=\frac{E}{Ex}f(x)$表示随$x$的变化$f(x)$的变化幅度的大小.

需求价格弹性

1）设某商品需求函数$Q=f(P)$在点$P=P_0$处 可导

处可导，$\dfrac{\Delta Q/Q_0}{\Delta P/P_0}$称为该商品在$P=P_0$与$P=P_0+\Delta P$

两点间的需求弹性

记为：$$\bar{\eta}_{(P_0,P_0+\Delta P)}=\frac{\Delta Q/Q_0}{\Delta P/P_0}=\frac{\Delta Q}{\Delta P}\cdot\frac{P_0}{Q_0}.$$

2）$\lim\limits_{\Delta P\to 0}\left(\dfrac{\Delta Q/Q_0}{\Delta P/P_0}\right)=f'(P_0)\cdot\dfrac{P_0}{f(P_0)}$称为该商品在$P=P_0$

处的需求弹性. $\eta>0$

记为：$$\eta|_{P=P_0}=\eta(P_0)=f'(P_0)\cdot\frac{P_0}{f(P_0)}.$$

3）$\eta(P)=f'(P)\cdot\dfrac{P}{f(P)}$ 称为该商品的需求弹性函数.

注：需求价格弹性的正负

供给价格弹性

1）设某商品供给函数$Q=\varphi(P)$在点$P=P_0$处可导，$\dfrac{\Delta Q/Q_0}{\Delta P/P_0}$

称为该商品在$P=P_0$与$P=P_0+\Delta P$两点间的供给弹性.

记为：$\bar{\varepsilon}_{(P_0,P_0+\Delta P)}=\dfrac{\Delta Q/Q_0}{\Delta P/P_0}=\dfrac{\Delta Q}{\Delta P}\cdot\dfrac{P_0}{Q_0}$.

$\varphi'>0$

2）$\lim\limits_{\Delta P\to 0}\left(\dfrac{\Delta Q/Q_0}{\Delta P/P_0}\right)=\varphi'(P_0)\cdot\dfrac{P_0}{\varphi(P_0)}$称为该商品在$P=P_0$处的供给弹性.

记为：$\varepsilon|_{P=P_0}=\varepsilon(P_0)=\varphi'(P_0)\cdot\dfrac{P_0}{\varphi(P_0)}$.

3）$\varepsilon(P)=\varphi'(P)\cdot\dfrac{P}{\varphi(P)}$称为该商品的供给弹性函数.

2009-2020 年经济应用分数分布

	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
数三	4	4		10	10	4	10	10	4	4	4	4

例 10(2014) 设某商品的需求函数为 $Q = 40 - 2P$（P 为商品的价格），则该商品的边际收益为______.

$\frac{dR}{dQ}$　$\boxed{QP}$　$P=20-\frac{Q}{2}$

【分析】 商品的收益函数为 $R(Q) = QP = 20Q - \dfrac{Q^2}{2}$，

所以商品的边际收益为

$$R'(Q) = 20 - Q.$$

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

例 11(2017) 设生产产品的平均成本$\overline{C}(Q)=1+e^{-Q}$，其中 Q 为产量，则边际成本为__________.

【分析】 因为成本函数$C(Q)=\overline{C}(Q)Q=(1+e^{-Q})Q$，

故边际成本为

$$C'(Q)=-e^{-Q}Q+1+e^{-Q}=1+(1-Q)e^{-Q}$$

例 12(2009) 设某产品的需求函数为 $Q=Q(P)$，其对价格 P 的弹性 $\varepsilon_p=0.2$，则当需求量为 10000 件时，价格增加 1 元会使产品收益增加________元

【分析】 设收益为 R，则 $R=QP$

$$\text{所以}\quad \frac{dR}{dP}=Q+P\frac{dQ}{dP}=Q\left(1+\boxed{\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}}\right)=Q(1-\varepsilon_p)$$

$+\varepsilon_p$

将 $Q=10000$ 代入有 $\dfrac{dR}{dP}=8000$.

例 13（2010） 设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，且 $R(1)=1$，则 $R(p)=$ ____________.

【详解】 由弹性的定义知 $\boxed{\dfrac{dR}{dp}\cdot\dfrac{p}{R}}=1+p^3$，得 $\dfrac{dR}{R}=(\dfrac{1}{p}+p^2)dp$，

一阶

两边积分得 $\ln R=\ln p+\dfrac{1}{3}p^3+C$

又由 $R(1)=1$ 知，$C=-\dfrac{1}{3}$，所以 $R=p\cdot e^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$.

故应填 $p\cdot e^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$.

常考题型与典型例题

1、求函数的极值与最值，确定曲线的凹凸与拐点.

必考

2、求曲线的渐近线.

3、确定方程的根.

4、不等式的证明.

5、中值定理的证明.

一、求函数的极值与最值，确定曲线的凹凸与拐点.

例 14、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有

1° 连续函数 < 可导函数 / 不可导函数 —— 选择

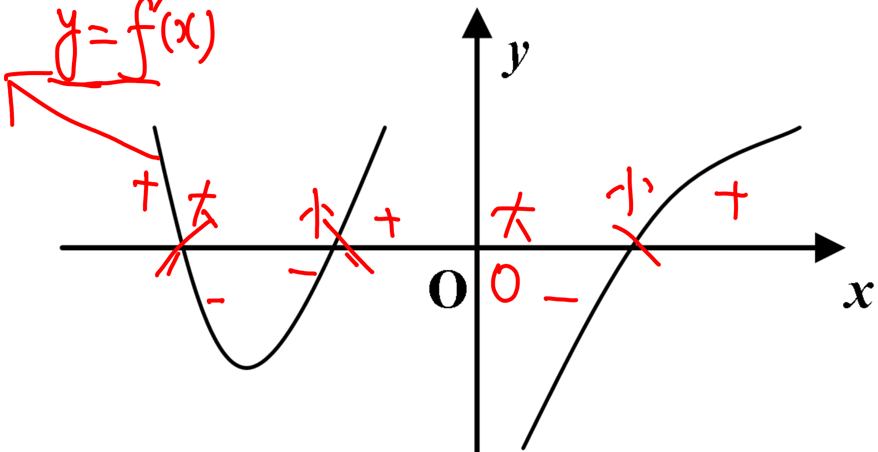
2° 抽象函数

(A) 一个极小值点和两个极大值点.

(B) 两个极小值点和一个极大值点.

(C) 两个极小值点和两个极大值点.

(D) 三个极小值点和一个极大值点. 【 】



答案：（C）

例 15(1990-1)已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

(A)不可导.　　　　(B)可导，且 $f'(0)\neq 0$

(C)取得极大值.　　(D) 取得极小值.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot x=0$$

【分析】1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1} \Rightarrow f'(0)=0$

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2>0$，由保号性在 $x=0$ 的某邻域内 $\dfrac{f(x)}{1-\cos x}>0$

有 $f(x)>0=f(0)$，在 $x=0$ 处取得极小值

答案：(D)

例 16、已在半径为 R 的球中内接一直圆锥，试求圆锥得最大体积.

【分析】 设球心到内接圆锥底面的距离为 x，则圆锥的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi(R^2-x^2)(R+x)=\frac{1}{3}\pi(R+x)^2(R-x)$$

令 $V'=\frac{1}{3}\pi[2(R+x)(R-x)-(R+x)^2]=0$，得

$x=\frac{R}{3}$，只有一个驻点，由实际问题此时体积最大

体积最大为 $V=\frac{32}{81}\pi R^3$

例 17(2018-23) 曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是_____.

$(x>0)$

【解】 $y'=2x+\dfrac{2}{x}, y''=2-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2(x^2-1)}{x^2}$

由 $y''=0$，得 $x=1, x=-1$(舍去)

拐点为$(1,1)$，又 $y'(1)=4$

则拐点处的切线方程为 $y-1=4(x-1)$，即 $y=4x-3$.

例 18(2004-23) 设 $f(x)=|x(1-x)|$，则 分段函数

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【解】
$$f(x)=\begin{cases}-x(1-x), & x\le 0\\ x(1-x), & 0<x\le 1,\\ -x(1-x), & x>1\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}-x(1-x), & x\le 0\\ x(1-x), & 0<x\le 1,\\ -x(1-x), & x>1\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-1+2x, & x<0,\\ 1-2x, & 0<x<1,\\ -1+2x, & 1<x.\end{cases}\qquad f''(x)=\begin{cases}2, & x<0,\\ -2, & 0<x<1,\\ 2, & 1<x.\end{cases}$$

当 $x<0$ 时，曲线是凹的；$0<x<1$ 时，曲线是凸的，于是$(0,0)$为拐点.

又 $f(0)=0$，$x\ne 0,1$ 时，$f(x)>0$，从而 $x=0$ 为极小值点. 选(C).

二、求曲线的渐近线

例 19(2014-12)下列曲线中有渐近线的是

(A) $y = x + \sin x$.　　　　(B) $y = x^2 + \sin x$.

(C) $y = x + \sin\dfrac{1}{x}$.　　　　(D) $y = x^2 + \sin\dfrac{1}{x}$.

$x=0$ 间断

$y=x$

(A)

$a = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x} = 1 + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to\infty}(y - x) = \lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不∃

$= 0$

答案：（C）

例 20(2007-12)、曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^{x})$，其渐近线的条数为

$x \neq 0$

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【解】$x=0$ 为垂直渐近线； $y=0$ 为水平渐近线；

$\frac{\infty}{\infty}$ $y=0$ $x\to-\infty$

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^{2}}+\frac{\ln(1+e^{x})}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{x})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}=1$$

$\ln e^{x}$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[y-1\cdot x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^{x})-x\right]=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+e^{x})-x]$$

$\infty-\infty$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+e^{x}}{e^{x}}=0.$$

于是有斜渐近线 $y=x$. 故应选(D).

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

例 21(2017-2)曲线 $y=x(1+\arcsin\frac{2}{x})$ 的斜渐近线方程为__.

【解】 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\arcsin\frac{2}{x})=1,$

$\lim\limits_{x\to\infty} x\arcsin\frac{2}{x}$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}[x(1+\arcsin\frac{2}{x})-x]=2,$ $=\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\frac{2}{x}$

曲线 $y=x(1+\arcsin\frac{2}{x})$ 的斜渐近线方程为 $y=x+2$

三、方程的根

1° $f(x)=0$　2° 函数零点　3° 曲线 $y=f(x)$ 与x轴的交点

$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)f(b)<0$，推 $f(\xi)=0$

(a,b)内至少存在　$f(a^+)f(b^-)<0$

基本思路：

1.对方程同解变形为 $f(x)=0$，使得求导 $f'(x)$ 容易，判断 $f'(x)$ 的符号方便；

$f'(x)=0$　或不可导点　$(-\infty,+\infty)$　(a,b)　$f(a^+)f(b)<0$

2.求出 $f(x)$ 的单调区间，在每一个单调区间内方程 $f(x)=0$ 至多有一个实根；

$f(-\infty)$　$f(+\infty)<0$　$[a,+\infty)$　$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$　$f(a)\cdot f(+\infty)<0$

3.用零点定理判断每一个单调区间内根的存在性.

例 22、讨论方程 $\ln x = \dfrac{x}{e} - 1$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内根的个数及范围.

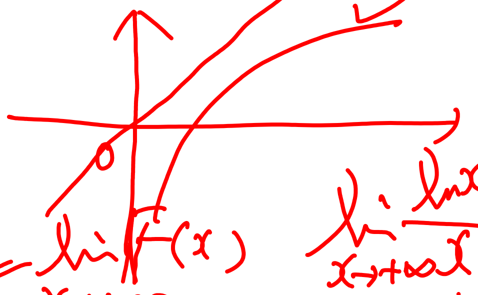
【详解】 令 $F(x) = \dfrac{x}{e} - 1 - \ln x$. 则 $F'(x) = \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-e}{ex}$.

由 $F'(x) = 0$, 得 $x = e$.

$(0, e)$, $(e, +\infty)$

当 $0 < x < e$ 时, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调减少;

当 $e < x < +\infty$ 时, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调增加.



$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ "$\dfrac{\infty}{\infty}$" $= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

又 $F(0^+) = +\infty > 0$, $F(e) = -1 < 0$, $F(+\infty) = +\infty > 0$.

方程 $\ln x = \dfrac{x}{e} - 1$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个不同的实根.

例 23(1992-5) 求证：方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根，其中 p,q 为常数且 $0<q<1$.

【证明】 令 $f(x)=x+p+q\cos x$， $(-\infty,+\infty)$

$f'(x)=1-q\sin x>0$，则 $f(x)$ 是单调递增的

方程 $f(x)=x+p+q\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内最多有一个实根

<0 >0

又 $f(-\infty)=-\infty, f(+\infty)=+\infty$，因而方程至少有一实根.

所以方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根.

例 24 设 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，求证方程

$$na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1=0$$

在(0,1)内至少有一个实根.

$f'(\xi)=0$

【分析】 令 $f(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$，在(0,1)上不满足零点定理（如 $f(0)=a_1$，$f(1)=na_n+\cdots+a_1$）

【证明】 令 $f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$，

取 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x$，$f$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理

则 $f(x)$ 是在[0,1]上用罗尔定理即可

$f(0)=0$，$f(1)=a_n+\cdots+a_1=0$

$f'(\xi)=0$

四、不等式的证明

$f(x) \geq 0$ $\left(\begin{matrix} >0 \\ <0 \end{matrix}\right)$

≤ 0

$f(x) \geq g(x)$

解题思路：

1.先对不等式进行等价变形，然后构造辅助函数；

2.不等式的证明方法主要有：利用单调性、极值、凹凸性、微分中值定理及转化数字不等式为函数不等式等.

例 25、证明：$\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x(0 < x)$.

$\ln 1$　$y=\ln t$　$[1, 1+x]$

方法一：先证 $\ln(1+x) < x$，令 $f(x) = \ln(1+x) - x$，(<0)

同理 则 $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x} < 0$，有 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减.

因而当 $0 < x$ 时，$f(x) < f(0) = 0$，即 $\ln(1+x) < x$.

再证 $\ln(1+x) > \dfrac{x}{x+1}$，令 $g(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1}$，$(>0)$

$g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2} > 0$，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

因而当 $0 < x$ 时，$g(x) > g(0) = 0$，即 $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x)$.

例 25、 证明：$\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x(0<x)$.

方法二：根据拉格朗日定理，存在$\xi \in (1,1+x)$，使得

$\ln t$

$$\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln 1 = \frac{x}{\xi}.$$

而$1<\xi<1+x$，则$\dfrac{x}{1+x} < \dfrac{x}{\xi} < x$

有 $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x(0<x)$.

例 26(1991-3)利用导数证明：当 $x>1$ 时，$\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} > \dfrac{x}{x+1}$.

$(1,+\infty)$

方法一： 不等式变形为 $(x+1)\ln(1+x) - x\ln x > 0$

令 $f(x) = (x+1)\ln(1+x) - x\ln x$，则

$(x+1)\ln(x+1) > x\ln x$

$f'(x) = \ln(1+x) - \ln x > 0$，

大 ln 大

当 $x>1$ 时，$f(x) > f(1) = 2\ln 2 > 0$.

即 $(x+1)\ln(1+x) - x\ln x > 0$，

亦是 $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} > \dfrac{x}{x+1}$.

例 26(1991-3)利用导数证明：当 $x>1$ 时，$\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} > \dfrac{x}{x+1}$.

方法二：只需证明 $f(x) = x\ln x$ 在 $x>1$ 时单调递增

$$f'(x) = \ln x + 1 > 0$$

当 $x>1$ 时 $f(x+1)>f(x)$,即 $(x+1)\ln(1+x) - x\ln x > 0$，

$$\text{亦是}\ \frac{\ln(1+x)}{\ln x} > \frac{x}{x+1}.$$

方法三：$f(x) = \ln x$ 在 $x>1$ 时单调递增，$\ln(1+x) > \ln x$

$$\text{而}\ 1 + x > x > 1 > 0$$

$$\text{则}\ (x+1)\ln(1+x) > x\ln x$$

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

例 26(1991-3)利用导数证明：当 $x>1$ 时，$\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{x+1}$.

$t\ln t$

方法四：只需证明 $(x+1)\ln(1+x)-x\ln x>0$，　x，$x+1$

令 $f(t)=t\ln t$，其在区间 $[x,x+1]$ 上用拉格朗日中值定理

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

存在 $\xi\in(x,x+1)$ 使得 $(x+1)\ln(1+x)-x\ln x=\ln\xi+1>0$

则 $(x+1)\ln(1+x)>x\ln x$

亦是 $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{x+1}$.

例 27(2012-123) 证明 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\dfrac{x^2}{2},\ (-1<x<1)$.

【分析 1】 令 $f(x)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}$，则

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x,$$

$$f''(x)=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2(1-x^2)-2x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}-\cos x-1$$

$$=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1\ge 2.$$

$f(0)=0$

$=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

$\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}$

$\boxed{f'(0)=0}$

>0

$f'(x)$

$f(x)$

$(-1,0)$

$(0,1)$

$f(x)$

例 27(2012-123) 证明 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\dfrac{x^2}{2},\ (-1<x<1)$.

【分析 2】 令 $f(x)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}$，则 $f(x)$ 为偶函数，

只证 $0\le x<1$ 时，$f(x)\ge 0$ 即可

2x

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x\ge 2x-\sin x-x=x-\sin x\ge 0,$$

$0\le x<1$ 时，$f(x)$ 单调不减，$f(x)\ge f(0)=0$

即 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\dfrac{x^2}{2},\ (-1<x<1)$.

五、中值定理的证明题

1° $f(\xi)=0$

2° $f^{(n)}(\xi)=0$

$F(\xi, f(\xi), f'(\xi))=0$

$G(f(\xi), f'(\xi), \dots)=0$

例 28、设 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=f(c)(a<c<b)$，证明存在$\xi\in(a,b)$，使得 $\boxed{f''(\xi)=0}$

【分析】 多次用罗尔定理

$a \quad \xi_1 \quad c \quad \xi_2 \quad b$

1° $f(x)$在$[a,c]$上用一次罗尔定理 $\xi_1\in(a,c)$，$f'(\xi_1)=0$

2° $[c,b]$ — $\xi_2\in(c,b)$，$f'(\xi_2)=0$

3° $f'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上用罗尔定理

$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$ 有 $f''(\xi)=0$

V研客 在线教育 www.vyanke.com

例 29(1990-12)设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)>0$

$\exists\ c\in(a,b)$ 使 $f(c)\neq f(a)=f(b)$

【分析 1】 用微分中值定理 $[a,c]$ $[c,b]$

1° $f(c)>f(a)$ $f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$ 取 $\xi=\xi_1$

2° $f(c)<f(a)=f(b)$ $f'(\xi_2)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}>0$ 取 $\xi=\xi_2$

例 29(1990-12) 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)>0$

【分析 2】 $\boxed{\text{用反证法}}$

$f'(x)\le 0$

$\forall x\in[a,b]$

$f(b)\le f(x)\le f(a)$

$\|$

$f(a)$

例 30(2013-3) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$，证明

方程 $f(x)=1$ 有根

(I) 存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$；

(II) 对（1）中的 a，存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

【证明】 (I) 令 $F(x)=f(x)-1$，显然其在 $[0,+\infty)$ 上连续，

广义零点定理

$$F(0)=f(0)-1=-1<0$$

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-1=1>0,$$

由连续函数的广义零点定理知，存在 $a>0$，使得 $F(a)=0$，

即 $f(a)=1$.

例 30(2013-3) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$，证明

(I) 存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$； $+\infty)$

(II) 对（1）中的 a，存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

【证明】 (II) 由题意知 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 上可导，

所以 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上满足拉格朗日中值定理，则存在 $\xi\in(0,a)$，

使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(a)-f(0)}{a}$，

用(I)中结果 $f(a)=1$，有 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

例 31、设 $f(x)$在 $[a,b]$上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，且存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)<0$.试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)<0, f''(\eta)>0$.

【分析】 1、$f(x)$在 $[a,c]$上拉格朗日中值定理 $f'(\xi)=\dfrac{f(c)}{c-a}<0.$

2、$f(x)$在 $[c,b]$上拉格朗日中值定理 $f'(\xi_1)=\dfrac{-f(c)}{b-c}>0, \xi_1>\xi.$

$f'(x)$在$[\xi,\xi_1]$上用拉格朗日中值定理，

$$有\ f''(\eta)=\frac{f'(\xi_1)-f'(\xi)}{\xi_1-\xi}>0.$$